



考卷[小题·标准练

小题1 “8+3+3”73分练

1. A 【解析】因为 $A = \{x \in \mathbf{N} | x^2 < 16\} = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x | x - 2 \leq 0\} = \{x | x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$. 故选 A.
2. B 【解析】由 $a_1 = 2a_2 = 2(a_1 + d)$, 得 $a_1 = -2d$, 又 $S_m = ma_1 + \frac{m(m-1)}{2}d = -2md + \frac{m(m-1)}{2}d = 0$, $d \neq 0$, 所以 $-2m + \frac{m(m-1)}{2} = 0$, 解得 $m = 5$ 或 $m = 0$ (舍去), 故选 B.
3. D 【解析】设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由题知 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 4$, 则 $|AB| = (x_1 + 2) + (x_2 + 2) = 2 \times 4 + 4 = 12$. 故选 D.
4. B 【解析】对于 A, 若直线 l 上有无数个点不在平面 α 内, 则 $l \parallel \alpha$ 或 l 与 α 相交, 故 A 错误; 对于 B, 若直线 a 不平行于平面 α 且 $a \not\subset \alpha$, 则 a 与 α 相交, 所以平面 α 内不存在与 a 平行的直线, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \parallel \beta$, 所以直线 a, b 平行或异面, 故 C 错误; 对于 D, 因为直线 a, b 相交, 且 $a \parallel$ 平面 α , 所以 $b \parallel \alpha$ 或 b 与 α 相交, 故 D 错误. 故选 B.
5. D 【解析】依题意, 先排第 1 名, 有 C_2^2 种方法, 再排第 5 名, 有 C_2^1 种方法, 最后排余下的名次, 有 A_3^3 种方法, 所以这 5 名同学的名次排列 (无并列名次) 方法共有 $C_2^2 C_2^1 A_3^3 = 24$ (种). 故选 D.
6. B 【解析】设 $A(x, y)$, 则 $\overrightarrow{OA} = (x, y)$, 由题得 $\overrightarrow{OB} = (x, -y)$, 所以 $B(x, -y)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (0, -2y)$, 所以 $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = x^2 + y^2 - 2y = 0$, 即 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, 所以点 A 的轨迹 E 是一个半径为 1 的圆, 故选 B.
7. C 【解析】因为 $2 \tan \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta}$, 所以 $\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta + \sin^2 \beta} = \frac{2 \cos \beta}{1 + \sin \beta}$, 所以 $\sin \alpha + \sin \alpha \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta$, 所以 $\sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$, 所以 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha + \beta)$. 因为 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\frac{\pi}{2} - \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha + \beta \in (0, \pi)$, 所以 $\frac{\pi}{2} - \alpha = \alpha + \beta$, 所以 $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos\left(2\alpha + \beta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.
8. B 【解析】如图, 连接 NF_1 , 设 NF_1 与 MF_2 的交点为 P, $|MF_1| = x (x > 0)$, 因

为 $\overrightarrow{NF_2} = 2\overrightarrow{MF_1}$, 所以 $|\overrightarrow{NF_2}| = 2|\overrightarrow{MF_1}| = 2x$, 由双曲线的定义可知 $|\overrightarrow{MF_2}| = |\overrightarrow{MF_1}| + 2a = 2a + x$, $|\overrightarrow{NF_1}| = 2a + |\overrightarrow{NF_2}| = 2x + 2a$. 因为 $\overrightarrow{NF_2} = 2\overrightarrow{MF_1}$, 所以 $NF_2 \parallel MF_1$, 所以 $\triangle NF_2P \sim \triangle F_1MP$, 则 $\angle F_1MF_2 = \angle MF_2N = \frac{\pi}{3}$, $\frac{|PN|}{|PF_1|} = \frac{|PF_2|}{|PM|} = \frac{|NF_2|}{|F_1M|} = 2$, 所以 $|PF_2| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{MF_2}| = \frac{2}{3}(2a + x)$, $|PN| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{NF_1}| = \frac{2}{3}(2a + 2x)$. 在 $\triangle PNF_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle PF_2N = \frac{|PF_2|^2 + |F_2N|^2 - |PN|^2}{2|PF_2| \cdot |F_2N|} = \frac{\frac{4}{9}(2a+x)^2 + 4x^2 - \frac{4}{9}(2a+2x)^2}{2 \times \frac{2}{3}(2a+x) \times 2x} = \frac{1}{2}$, 整理得 $3x^2 - 10ax = 0$, 得 $x = \frac{10}{3}a$, 所以 $|\overrightarrow{MF_1}| = \frac{10}{3}a$, $|\overrightarrow{MF_2}| = \frac{16}{3}a$, $|F_1F_2| = 2c$, 在 $\triangle F_1MF_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{|\overrightarrow{MF_1}|^2 + |\overrightarrow{MF_2}|^2 - |F_1F_2|^2}{2|\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}|} = \frac{1}{2}$, 得 $7a = 3c$, 所以双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$. 故选 B.

9. BD 【解析】令 $f(x) = \sin 2x = \frac{1}{2}$, 得 $2x = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ 或 $2x = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 故 $x = \frac{\pi}{12} + k_1\pi$ 或 $x = \frac{5\pi}{12} + k_2\pi$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, 故 $|x_1 - x_2| = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ 或 $|x_1 - x_2| = \left|\frac{5\pi}{12} + k_2\pi - \frac{\pi}{12} - k_1\pi\right| = \left|\frac{\pi}{3} + m\pi\right|$, $k_1, k_2, m \in \mathbf{Z}$, 取 $m = 0$, 得 $|x_1 - x_2| = \frac{\pi}{3}$, 取 $m = -1$, 得 $|x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{3}$. 故选 BD.

10. BCD 【解析】设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, $w = c + di (c, d \in \mathbf{R})$. 对于 A, $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$, 故 A 错误; 对于 B, $\frac{z}{z} = \frac{z^2}{z \cdot z}$, 又 $\bar{z} \cdot z = |z|^2$, 所以 $\frac{z}{z} = \frac{z^2}{z \cdot z}$, 故 B 正确; 对于 C, $z - w = a + bi - c - di = a - c + (b - d)i$, 则 $\bar{z} - \bar{w} = a - c - (b - d)i$, 又 $\bar{z} = a - bi$, $\bar{w} = c - di$, 则 $\bar{z} - \bar{w} = a - bi - c + di = a - c - (b - d)i$, 即有 $\bar{z} - \bar{w} = \overline{z - w}$, 故 C 正确; 对于 D, $\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{a + bi}{c + di}\right| = \frac{|(a + bi)(c - di)|}{|(c + di)(c - di)|} = \frac{|ac + bd - (ad - bc)i|}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2}}{c^2 + d^2}$, 故 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

11. ABD 【解析】对于 A, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 关于原点对称, 令 $x = y = 0$, 可得 $f(0) = 2f(0)$, 解得 $f(0) = 0$, 令 $y = -x$, 可得 $f(0) = f(x) + f(-x)$, 即 $f(x) + f(-x) = 0$, 故 $y = f(x)$ 是奇函数, 故 A 正确; 对于 B, 令 $x = y = 1$, 可得 $f(2) = 2f(1) - 3 \times 2$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $f(2) = 2 \times 1 - 6 = -4$, 又 $y = f(x)$ 为奇函数, 故 $f(-2) = -f(2) = 4$, 故 B 正确; 对于 C, 由题知 $f(0) = 0$, 又 $f(1) = -1$, 所以当 $x = 0$ 时, $y = f(0) + 0 = 0$, 当 $x = 1$ 时, $y = f(1) + 1 = 0$, 故 $y = f(x) + x^3$ 不是增函数, 故 C 错误; 对于 D, 令 $h(x) = f(x) + x^3$, 在 $\mathbf{R}$ 上任取 $x_1 > x_2$, 则 $h(x_1) - h(x_2) = f(x_1) + x_1^3 - f(x_2) - x_2^3 = f[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2) + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = f(x_1 - x_2) + f(x_2) - 3(x_1 - x_2)x_2[(x_1 - x_2) + x_2] - f(x_2) + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = f(x_1 - x_2) - 3x_1x_2(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = f(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = f(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = f(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^2$, 因为当 $x > 0$ 时, $f(x) + x^3 > 0$ 恒成立, $x_1 - x_2 > 0$, 所以 $f(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)^3 > 0$, 即 $h(x_1) - h(x_2) > 0$, 则 $h(x_1) > h(x_2)$, 故 $y = f(x) + x^3$ 为增函数, 故 D 正确. 故选 ABD.

12. e 【解析】 $\because f(x) = \ln x, \therefore f'(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$, 又 $f(x_0) = \ln x_0$, $\therefore f(x)$ 的图象在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 把 $(0, 0)$ 代入切线方程, 可得 $-\ln x_0 = -1$, 解得 $x_0 = e$.

13. 24π $[\pi, 6\pi]$ 【解析】由题意, 在三棱锥 $P-AEF$ 中, $AP \perp PE$, $PE \perp PF$, $PF \perp PA$, $PA = 4$, $PE = PF = 2$, 故可将三棱锥补形为长、宽、高分别为 2, 2, 4 的长方体, 如图所示, 则三棱锥 $P-AEF$ 的外接球即为长方体的外接球, 设三棱锥 $P-AEF$ 的外接球的半径为 R , 则 $(2R)^2 = 2^2 + 2^2 + 4^2 = 24$, 得 $R = \sqrt{6}$, 所以三棱锥 $P-AEF$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 24\pi$. 设三棱锥 $P-AEF$ 的外接球球心为 O , EF 的中点为 O_1 , 连接 OM , OO_1 , O_1M , 则 $OO_1 \perp$ 平面 PEF , $OO_1 = 2$, $O_1M = 1$, 则 $OM = \sqrt{5}$. 过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球所得截面为圆, 其中最大的截面为过球心 O 的大圆, 此时截面的面积为 $\pi R^2 = \pi(\sqrt{6})^2 = 6\pi$, 最小的截面是以 M 为圆心且垂直于 OM 的圆, 此时截面圆的半径 $r = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{6 - 5} = 1$, 故截面的面积为 $\pi r^2 = \pi$, 所以过点 M 的平面截三棱锥 $P-AEF$ 的外接球所得截面的面积的取值范围为 $[\pi, 6\pi]$.

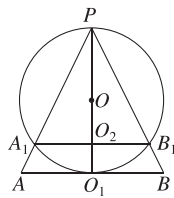
14. 7 【解析】设报出的数构成一个数列 $\{a_n\}$, 则这个数列从第三项起, 每项都是前两项之和, 则该数列为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, $\dots$, 每项除以 3 所得余数依次是 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, $\dots$, 由此可见余数构成的数列 (记为 $\{b_n\}$) 的周期为 8. 可知 $b_{1k} = 0, k \in \mathbb{N}^*$, 所以 $a_{1k} (k \in \mathbb{N}^*)$ 是 3 的倍数, 由 $4k \leq 30, k \in \mathbb{N}^*$, 得 $k = 1, 2, 3, \dots, 7$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项中 3 的倍数总共有 7 个, 则拍手的总次数为 7.

小题 2 “8+3+3”73 分练

1. A 【解析】因为 $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, 所以由 $z(1+i) = |1 + \sqrt{3}i|$, 得 $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1-i)(1+i)} = 1-i$. 故选 A.
2. C 【解析】当 $x < 2$ 时, $2^x < 4$, 因为 “ $\forall x < 2, 2^x < 4$ ” 为真命题, 所以 $a \geq 4$, 故实数 a 的取值范围为 $[4, +\infty)$. 故选 C.
3. D 【解析】由题意知 $\mu = 90$, 由正态曲线的对称性可知 $P(X > 110) = 0.5 - \frac{1}{2}P(70 \leq X \leq 110) = 0.5 - 0.4 = 0.1$, 则

该市这次考试数学成绩超过 110 分的考生人数约为 $0.1 \times 50\,000 = 5000$. 故选 D.

4. C 【解析】令 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 得 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. 当 $k=1$ 时, $x = \frac{\pi}{3}$; 当 $k=2$ 时, $x = \frac{5\pi}{6}$; 当 $k=3$ 时, $x = \frac{4\pi}{3}$; 当 $k=4$ 时, $x = \frac{11\pi}{6}$. 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内共有 4 个零点. 故选 C.
5. B 【解析】依题意, $a_2 = 2a_1 = 2$, 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n \geq 2$ 时, $a_{2n} = 2a_{2n-1} = 2a_{2n-2} + 2$, 所以 $a_{2n} + 2 = 2(a_{2n-2} + 2)$, 可知数列 $\{a_{2n} + 2\}$ 是以 $a_2 + 2 = 4$ 为首项, 以 2 为公比的等比数列, 所以 $a_{2n} + 2 = 2^{n+1}$, 得 $a_{2n} = 2^{n+1} - 2$, 所以 $a_{20} = 2^{11} - 2$. 故选 B.
6. A 【解析】根据题意, 以圆锥的高为直径的球的半径为 1, 且球与圆锥底面相切于圆锥的底面圆心. 如图, 作圆锥 PO_1 的轴截面 PAB , 设 AB 的中点为 O_1 , 连接 PO_1 , 设 PO_1 的中点为 O , 圆 O 与 PA, PB 的交点分别为 A_1, B_1 (A_1, B_1 均不与 P 重合), 连接 A_1B_1 , 设 A_1B_1 的中点为 O_2 . 由题知 $PA = PB = \sqrt{5}$, $\tan \angle APO_1 = \frac{1}{2}$, 设 $\angle APB = \alpha$, 则 $\sin \alpha = \sin(\pi - 2\angle PAB) = \sin 2\angle PAB = 2\sin \angle PAB \cos \angle PAB = 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$. 设 $A_1O_2 = r$, 则 $2 = \frac{2r}{\sin \alpha}$, 得 $r = \frac{4}{5}$, 则 $PO_2 = \frac{r}{\tan \angle APO_1} = \frac{8}{5}$, 则所求体积 $V = \pi \times \left(\frac{8}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{8}{15}\right) - \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{8}{5} = \frac{64\pi}{75}$. 故选 A.



7. C 【解析】①当 $a < 0$ 时, 若 $x < a$, 则 $f(x) = e^x + a$, 因为函数 $f(x) = e^x + a$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 所以 $a < f(x) < e^a + a$; 若 $x \geq a$, 则 $f(x) = x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2 \geq -a^2$, 当且仅当 $x = -a$ 时取等号. 因为 $f(x)$ 不存在最小值, 所以 $-a^2 > a$, 所以 $-1 < a < 0$. ②当 $a \geq 0$ 时, 若 $x < a$, 则 $f(x) = e^x + a$, 因为函数 $f(x) = e^x + a$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 所以 $a < f(x) < e^a + a$; 若 $x \geq a$, 则 $f(x) = x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2 \geq f(a) = 3a^2$, 当且仅当 $x = a$ 时取等号. 因为 $f(x)$ 不存在最小值, 所以 $3a^2 > a$, 所

以 $a > \frac{1}{3}$. 综上, 实数 a 的取值范围是

$(-1, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$. 故选 C.

8. A 【解析】如图, 连接 OA, OB , 则 $PA \perp OA, PB \perp OB$, 设 $P(x, y)$, 则 $|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (\vec{PO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{PO} + \vec{OB}) = |\vec{PO}|^2 + \vec{PO} \cdot \vec{OA} + \vec{PO} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OB}$, 由题知 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos \angle AOB = \cos \angle AOB = \cos 2\angle POA = 2\cos^2 \angle POA - 1 = 2 \times \frac{|\vec{OA}|^2}{|\vec{OP}|^2} - 1 = \frac{2}{x^2 + y^2} - 1$, $\vec{PO} \cdot \vec{OA} = \vec{PO} \cdot \vec{OB} = |\vec{PO}| \cdot |\vec{OA}| \cos(180^\circ - \angle POA) = -|\vec{PO}| \cdot |\vec{OA}| \cos \angle POA = -|\vec{PO}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \frac{|\vec{OA}|}{|\vec{OP}|} = -1$, 故 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = x^2 + y^2 - 2 + \frac{2}{x^2 + y^2} - 1 \geq 2\sqrt{(x^2 + y^2) \cdot \frac{2}{x^2 + y^2}} - 3 = 2\sqrt{2} - 3$, 当且仅当 $x^2 + y^2 = \frac{2}{x^2 + y^2}$, 即 $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$ 时, 等号成立, 故当 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 的值最小时, 点 P 到圆心 O 的距离为 $\sqrt{2}$. 故选 A.

9. ACD 【解析】由题可得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (9 + 9.5 + 10 + 10.5 + 11) = 10$, 故 A 正确.
$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-8}{\sqrt{2.5 \times 26}} = \frac{-8}{\sqrt{65}} \approx -0.99$$
, 故 y 与 x 的线性相关性很强, 从而可以用一元线性回归模型拟合 y 与 x 的关系, 且 y 与 x 负相关, 故 B 错误, C, D 正确. 故选 ACD.

10. BD 【解析】抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 准线方程为 $x = -\frac{p}{2}$, 又点 $M(2, \sqrt{3})$ 满足 $|MF| = 2|OF|$, 所以 $\sqrt{\left(\frac{p}{2} - 2\right)^2 + (0 - \sqrt{3})^2} = 2 \times \frac{p}{2}$, 即 $3p^2 + 8p - 28 = 0$, 解得 $p = 2$ 或 $p = -\frac{14}{3}$ (舍去), 所以抛物线 $C: y^2 = 4x$, 则 C 的准线方程为 $x = -1$, 焦点为 $F(1, 0)$, 故 A 错误; 易知点 M 在抛物线内, 过点 P 作准线 $x = -1$ 的垂线, 垂足为 H , 连接 MH , 则 $|MH|_{\min} = 3$, 由抛物线的定义可知 $|PH| = |PF|$, 所以 $\triangle PMF$ 的周长为 $|PM| + |MF| +$

$|PF| = |PM| + |MF| + |PH| = |PM| + |PH| + 2 \geq |MH| + 2 \geq 3 + 2 = 5$, 当且仅当 M, P, H 三点共线时, $\triangle PMF$ 的周长取得最小值 5, 故 B 正确; 因为 $k_{MF} = \frac{\sqrt{3}-0}{2-1} = \sqrt{3}$, 所以直线

MF 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$, 故 C 错误; 过点 M 作 OF 的平行线, 交抛物线于点 P , 由

$$\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = \sqrt{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{3}{4}, \\ y = \sqrt{3}, \end{cases} \text{ 即 } P\left(\frac{3}{4}, \sqrt{3}\right),$$

则 $|MP| = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \neq |OF|$, 所以

以四边形 $OPMF$ 不可能是平行四边形, 故 D 正确. 故选 BD.

11. ABD 【解析】由题可知, 两个函数图象都在 x 轴及其上方, 所以函数 $f(x)$ 是增函数, 故虚线部分为 $y = f'(x)$ 的图象, 实线部分为 $y = f(x)$ 的图象. 令 $g(x) = f(x) \cdot e^x$, 则 $g'(x) = f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = [f'(x) + f(x)] \cdot e^x > 0$ 恒成立, 故 $g(x) = f(x) \cdot e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $g(x)$ 没有最值, 故 A, B 中结论均错误. 令 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$, 由图可知, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, 故 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递增, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$, 故 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 单调递减, 所以函数 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ 在 $x=0$ 处取得最大值, 最大值为 $\frac{f(0)}{e^0} = 1$, 故 C 中结论正确, D 中结论错误. 故选 ABD.

12. $\frac{7}{8}$ 【解析】 $\because \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$, $\therefore \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left[\frac{\pi}{2} + \left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\right] = -\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2 \times \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$.

13. 24 【解析】因为 $(x+2y)(x-y)^6 = (x+2y)(C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 y + C_6^2 x^4 y^2 - C_6^3 x^3 y^3 + C_6^4 x^2 y^4 - C_6^5 x y^5 + C_6^6 y^6)$, 所以 $x^2 y^5$ 的系数为 $-C_6^5 + 2C_6^4 = 24$.

14. $\{9, 12, 21\}$ 【解析】由题意设 $x^2 - 80 = y^2 \geq 0$ ($x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}$), 则 $(x-y)(x+y) = 80$, 可得 $0 < x-y < x+y$. 因为 $(x-y) + (x+y) = 2x$ 且 $2x$ 是偶数, 所以 $x-y$ 与 $x+y$ 的奇偶性相同. 因为 $(x-y)(x+y) = 80$ 且 80 是偶数, 所以 $x-y$ 与 $x+y$ 必然都是偶数, 故满足题意的数组 $(x-y, x+y)$ 有 $(2,$

$40), (4, 20), (8, 10)$ 三种情况, 所以正整数 x 的取值是 $\frac{2+40}{2} = 21, \frac{4+20}{2} = 12, \frac{8+10}{2} = 9$, 即正整数 x 的取值组成的集合是 $\{9, 12, 21\}$.

小题 3 “8+3+3”73 分练

1. A 【解析】由题知 $N = \{y | y > 1\}$, 又 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x \geq -2\}$. 故选 A.
2. A 【解析】由 $z(1+i) = i^{2024}$ 得 $z = \frac{i^{2024}}{1+i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 故 z 的虚部为 $-\frac{1}{2}$. 故选 A.
3. B 【解析】由双曲线的焦距为 4 可得 $2c = 4$, 即 $c = 2$, 又 $a = 1$, 所以 $c^2 = 1 + b^2 = 4$, 可得 $b^2 = 3$, 即 $b = \sqrt{3}$, 则 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x$. 故选 B.
4. D 【解析】因为 $\sin 2\alpha = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = -\frac{4}{5}$, 所以 $1 + \tan^2 \alpha = -\frac{5}{2} \tan \alpha$, 所以 $\frac{\tan 2\alpha}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \times \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{2\tan \alpha}{(1 + \tan \alpha)^2} = \frac{2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha + 2\tan \alpha} = -4$. 故选 D.
5. D 【解析】因为 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$, $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(A\bar{B}) = \frac{1}{5}$, 所以 $P(AB) = P(A) - P(A\bar{B}) = \frac{2}{5}$, 又 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$, 所以 $P(B) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$. 故选 D.
6. B 【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数且满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以 $f[(x+1)+1] = f[1-(x+1)]$, 即 $f(x+2) = f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x+4) = f[(x+2)+2] = -f(x+2) = -[-f(x)] = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 因为 $5 = \log_2 32 < \log_2 36 < \log_2 64 = 6$, 所以 $0 < 6 - \log_2 36 < 1$, 所以 $f(\log_2 36) = f(\log_2 36 - 4) = -f(4 - \log_2 36) = f(4 - \log_2 36 + 2) = f(6 - \log_2 36) = 2^{\frac{6 - \log_2 36}{2}} = \frac{2^6}{2^{\frac{\log_2 36}{2}}} = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$. 故选 B.

7. D 【解析】由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$, $a_n \neq 0$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 3}{a_n} = 2 + \frac{3}{a_n}$, 则 $\frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1}} = 3 + \frac{3}{a_n} = 3 + \frac{a_n + 1}{a_n}$, 由题知 $a_n + 1 \neq 0$, 则

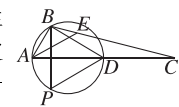
$\frac{a_{n+1} + 1}{a_{n+1}} = 3$, 即数列 $\left\{\frac{a_n + 1}{a_n}\right\}$ 是公比为 3 的等比数列, 所以 $\frac{a_{2025} + 1}{a_{2025}}$ 与 $\frac{a_{2024} + 1}{a_{2024}}$ 的比值为 3. 故选 D.

8. C 【解析】要求出被完全覆盖的最大的圆的半径, 由圆的对称性知只需考虑三个圆的圆心构成等边三角形的情况, 设三个半径为 1 的圆的圆心分别为 O_1, O_2, O_3 , 被覆盖的圆的圆心为 O . 如图, 设圆 O_1 与圆 O_2 交于 A, B 两点, 连接 AB 并延长, 交圆 O_3 于点 C (B 在 A, C 之间), 连接 $O_1 O_2, O_2 O_3, O_3 O_1$, 设 $O_1 O_2 \cap AB = H$, 显然 O 为正三角形 $O_1 O_2 O_3$ 的中心. 连接 $O_1 A, OO_1$, 设 $OO_1 = OO_3 = x$, 则 $O_1 H = \frac{\sqrt{3}x}{2}$, $OH = \frac{x}{2}$, 所以 $HA = \sqrt{O_1 A^2 - O_1 H^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2}$, 则 $OA = OH + HA = \frac{x}{2} + \sqrt{1 - \frac{3}{4}x^2} = \frac{1}{2}(x + \sqrt{4 - 3x^2})$, 由 $\begin{cases} 4 - 3x^2 > 0, \\ x > 0, \end{cases}$ 得 $0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 又 $OC = OO_3 + O_3 C = x + 1 > OA$, 因此圆 O 的最大半径为 OA . 令 $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{4 - 3x^2})$ ($0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$), 得 $f'(x) = \frac{\sqrt{4 - 3x^2} - 3x}{2\sqrt{4 - 3x^2}}$, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $0 < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, 因此 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以被完全覆盖的最大的圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 此时 $O_1 O_2 = O_2 O_3 = O_3 O_1 = 1$, 即圆 O_1 、圆 O_2 、圆 O_3 中的任一圆均经过另外两圆的圆心. 故选 C.

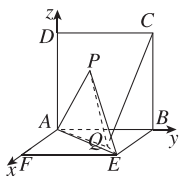
9. BC 【解析】如图, 连接 AB, BC, CA , 由题知四边形 $OACB$ 是平行四边形, $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. 因为 OC 平分 $\angle AOB$, 所以平行四边形 $OACB$ 是菱形, 即 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. 对于 A, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不一定垂直, 故 A 错误; 对于 B, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$, 即 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 故 B 正确; 对于 C, $\vec{a}$ 在 $\vec{a} + \vec{b}$

b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot (a+b)}{|a+b|^2}(a+b) = \frac{a^2+a \cdot b}{|a+b|^2}(a+b)$, b 在 $a+b$ 上的投影向量为 $\frac{b \cdot (a+b)}{|a+b|^2}(a+b) = \frac{b^2+a \cdot b}{|a+b|^2}(a+b)$, 故 C 正确; 对于 D, 由选项 A 知, $a \cdot b$ 不一定为 0, 则 $|a+b|$ 与 $|a-b|$ 不一定相等, 故 D 错误. 故选 BC.

10. ACD 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $BC^2 = 1 + 4^2 - 2 \times 1 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 13$, 则 $BC = \sqrt{13}$, 由 AE 平分 $\angle BAC$ 得 $BE : EC = BA : AC = 1 : 4$, 则 $BE = \frac{1}{5}BC = \frac{\sqrt{13}}{5}$, 所以 A 正确; 由 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ABC}$ 得 $\frac{1}{2} \times AE \times 1 \times \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \times AE \times 4 \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 1 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3}$, 解得 $AE = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 所以 B 错误; $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times AE \times 1 \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 所以 C 正确; 如图, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD = \sqrt{1 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$, 由题知 $\angle BPD = \frac{\pi}{3}$, 设 $\angle PBD = \theta$, 则 $\angle PDB = \frac{2\pi}{3} - \theta$, 在 $\triangle BPD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{PD}{\sin \theta} = \frac{BP}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)} = \frac{BD}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$, 所以 $PB + \frac{1}{2}PD = 2\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta) + \sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta + 2\sin \theta = \sqrt{7} \sin(\theta + \varphi) \leq \sqrt{7}$, 其中 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时, $PB + \frac{1}{2}PD$ 取得最大值 $\sqrt{7}$, 所以 D 正确. 故选 ACD.



11. ACD 【解析】由题知平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, $DA \perp AB$, 所以 $DA \perp$ 平面 $ABEF$, 则 $DA \perp AF$, 又四边形 $ABEF$ 是矩形, 所以 $AB \perp AF$, 以 A 为原点 AF, AB, AD 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 0), F(1, 0, 0), B(0, 2, 0), D(0, 0, 2), C(0, 2, 2), E(1, 2, 0)$, 设 $P(0, m, n), Q(s, t, 0)$, 其中 $0 \leq m, n, t \leq 2, 0 \leq s \leq 1$. 对于 $A, \overrightarrow{PQ} = (s, t - m,$



$-n)$, 则 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{s^2 + (t-m)^2 + n^2}$, 当 $s=1, t=n=2, m=0$ 时, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, 故存在点 P, Q , 使得 $PQ=3$, 故 A 正确; 对于 B, $\overrightarrow{CQ} = (s, t-2, -2), \overrightarrow{EP} = (-1, m-2, n)$, 假设存在点 P, Q , 使得 $CQ \parallel EP$, 则存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{CQ} = \lambda \overrightarrow{EP}$, 即 $\begin{cases} s = -\lambda, \\ t-2 = \lambda(m-2), \\ -2 = \lambda n, \end{cases}$ 由 $0 \leq m, n, t \leq 2, 0 \leq s \leq 1, sn=2$, 可得 $s=1, n=2$, 此时有 $m-2 = -(t-2)$, 即 $m+t=4$, 可得 $m=t=2$, 此时 Q 与 E 重合, P 与 C 重合, 假设不成立, 故不存在点 P, Q , 使得 $CQ \parallel EP$, 故 B 错误; 对于 C, 由题知点 P 到直线 AD 的距离为 m , 点 P 到直线 EF 的距离为 $\sqrt{1+n^2}$, 由 $m = \sqrt{1+n^2}$, 得 $m^2 - n^2 = 1, 0 \leq m, n \leq 2$, 故点 P 的轨迹为双曲线右支的一部分, 即满足题意的点 P 有无数个, 故 C 正确; 对于 D, $\overrightarrow{AP} = (0, m, n), \overrightarrow{EP} = (-1, m-2, n)$, 由 $PA \perp PE$, 得 $m(m-2) + n^2 = 0$, 则 $n^2 = 1 - (m-1)^2 \in [0, 1]$, 由题知三棱锥 $P-AQE$ 的高为 n , 又 $S_{\triangle AQE} \leq \frac{1}{2} S_{\text{矩形} ABEF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$, 故 $V_{P-AQE} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle AQE} \times n \leq \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

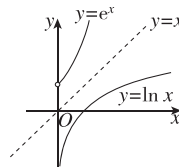
12. 6 【解析】由题意知这组数据的极差是 $57 - 1 = 56$. 由 $10 \times 30\% = 3$, 得这组数据的第 30 百分位数为 $\frac{a+10}{2}$, 故 $56 = 7 \times \frac{a+10}{2}$, 得 $a=6$.
13. $\sqrt{2} - 1$ 【解析】设椭圆的焦距为 $2c$ ($c > 0$), 则 $F(c, 0)$, 由题知 $c = \frac{p}{2}$, 因为 $PF \perp x$ 轴, 所以 $x_P = c, y_P^2 = 2pc = 4c^2$. 不妨取 $P(c, 2c)$, 由点 P 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上, 得 $\frac{c^2}{a^2} + \frac{4c^2}{b^2} = 1$, 化简得 $c^4 - 6a^2c^2 + a^4 = 0$, 即 $e^4 - 6e^2 + 1 = 0$, 解得 $e^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$, 因为 $0 < e < 1$, 所以 $e = \sqrt{2} - 1$.

14. 4 【解析】由题意设 $P(x_0, x_0 + \frac{a}{x_0})$, 则 $B(0, x_0 + \frac{a}{x_0})$, 因为与直线 l 垂直的直线的斜率为 -1 , 所以直线 AP 的方程为 $y - (x_0 + \frac{a}{x_0}) = -(x - x_0)$, 与 $y = x$ 联立可得 $x = y = x_0 + \frac{a}{2x_0}$, 所以 $A(x_0 + \frac{a}{2x_0}, x_0 + \frac{a}{2x_0})$, 所以 $\triangle ABP$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |x_0| \left| x_0 + \frac{a}{2x_0} - (x_0 + \frac{a}{x_0}) \right| = \frac{1}{2} |x_0| \left| -\frac{a}{2x_0} \right| = \frac{1}{4} |a|$, 解得 $a = 4$.

$\frac{a}{x_0} \Big) \Big| = \frac{1}{2} |x_0| \Big| \frac{a}{2x_0} \Big| = \frac{1}{4} |a| = \frac{1}{2}$, 解得 $a = 2$. 因为 $f(x) = x + \frac{a}{x}$, 所以 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$, 所以直线 MN 的斜率 $k = 1 - \frac{a}{x_0^2}$, 所以直线 MN 的方程为 $y - (x_0 + \frac{a}{x_0}) = (1 - \frac{a}{x_0^2})(x - x_0)$ (*), 令 $x = 0$, 得 $y = \frac{2a}{x_0}$, 所以 $N(0, \frac{2a}{x_0})$. 方程 (*) 与 $y = x$ 联立可得 $x = y = 2x_0$, 所以 $M(2x_0, 2x_0)$, 所以 $\triangle OMN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{2a}{x_0} \right| \cdot |2x_0| = 2a = 4$.

小题 4 “8+3+3”73 分练

1. D 【解析】因为 $B = \{x | x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$. 故选 D.
2. A 【解析】函数 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 作出函数 $y = e^x, y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象, 如图所示, 数形结合可知, 命题 $p: \forall x \in (0, +\infty), e^x > \ln x$ 为真命题. p 的否定: $\exists x \in (0, +\infty), e^x \leq \ln x$. 故选 A.



3. C 【解析】因为 $\sin 18^\circ = m$, 所以 $\cos 18^\circ = \sqrt{1 - m^2}$, 则 $\sin 63^\circ = \sin(18^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 18^\circ + \cos 18^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (m + \sqrt{1 - m^2})$. 故选 C.
4. B 【解析】连接 BD , 由 $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}|$, 得 $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AB}|$, 又四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $\triangle ABD$ 是正三角形, 则 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2$, 因此 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$. 故选 B.

5. C 【解析】因为 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, 且 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增, $f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 是增函数. 对于 A, 不妨令 $f(x) = x$, 则 $y = f(x) + x^2 = x + x^2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, 此时 $y = f(x) + x^2$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 故 A 错.

误;对于 B,不妨令 $f(x)=x$, 则 $y=f(x)-x^2=x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$, 此时 $y=f(x)-x^2$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

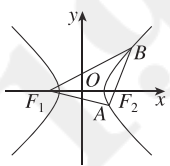
上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减,

故 B 错误;对于 C, $y=x^2 f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 又 $(-x)^2 f(-x)=-x^2 f(x)$, 所以 $y=x^2 f(x)$ 是奇函数, 取 $0 < x_1 < x_2$, 则 $0 < x_1^2 < x_2^2$, $0 < f(x_1) < f(x_2)$, 故 $x_1^2 f(x_1) < x_2^2 f(x_2)$, 所以函数 $y=x^2 f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则函数 $y=x^2 f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增, 且当 $x=0$ 时, $y=x^2 f(x)=0$, 所以 $y=x^2 f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 故 C 正确;对于 D, 不妨令 $f(x)=x$, 则 $y=\frac{f(x)}{x^2}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$, 此时 $y=\frac{f(x)}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 D 错误. 故选 C.

6. B 【解析】设函数 $f(x)=e^x-x-1$, 则 $f'(x)=e^x-1$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 所以 $f(x) \geq f(0)=0$, 即 $e^x \geq x+1$. 因为 $S_3=e^{s_1} \geq S_4+1$, 所以 $S_3-S_4 \geq 1$, 即 $a_4 \leq -1$. 因为 $a_4=a_1 q^3$, $a_1 > 1$, 所以 $q < 0$, 排除 A, C. 若 $q=-1$, $a_1=2$, 则 $S_3=2, S_4=0$, 不满足 $S_3=e^{s_4}$, 排除 D. 故选 B.

7. B 【解析】由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 及 $\omega > 0$, 可得 $\omega x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{6}\right]$, 因为 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的取值范围为 $[-1, 2]$, 且 $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{6} \leq \pi + \frac{\pi}{6}$, 解得 $\frac{4}{3} \leq \omega \leq \frac{8}{3}$. 故选 B.

8. D 【解析】设 $|F_1 F_2|=2c(c>0)$. 如图, 因为双曲线 E 的离心率为 $\sqrt{2}$, 所以 $c=\sqrt{2}a$, 因为 $|AB|=|AF_1|$, 所以 $|BF_2|=|AB|-|AF_2|=|AF_1|-|AF_2|=2a$, 由双曲线的定义可得 $|BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-2a=2a$, 所以 $|BF_1|=4a=2|BF_2|$. 在 $\triangle BF_1 F_2$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BF_2 F_1 = \frac{|BF_2|^2 + |F_1 F_2|^2 - |BF_1|^2}{2|BF_2| \cdot |F_1 F_2|} = \frac{4a^2 + 8a^2 - 16a^2}{2 \times 2a \times 2\sqrt{2}a} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, 在 $\triangle AF_1 F_2$ 中, $\cos \angle F_1 F_2 A = -\cos \angle F_1 F_2 B = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 设 $|AF_2|=m(m>0)$, 则 $|AF_1|=m+2a$, 由 $|AF_1|^2 = |F_1 F_2|^2 + |AF_2|^2 - 2|F_1 F_2||AF_2|\cos \angle F_1 F_2 A$, 得 $(2a +$



$m)^2 = (2\sqrt{2}a)^2 + m^2 - 2 \times 2\sqrt{2}a \times m \times \frac{\sqrt{2}}{4}$, 解得 $m = \frac{2}{3}a$, 所以 $|AF_1| = \frac{8a}{3}$, 所以在 $\triangle BAF_1$ 中, $\cos \angle BAF_1 = \frac{|AF_1|^2 + |AB|^2 - |BF_1|^2}{2|AF_1| \cdot |AB|} = \frac{\frac{64a^2}{9} + \frac{64a^2}{9} - 16a^2}{2 \times \frac{8a}{3} \times \frac{8a}{3}} = -\frac{1}{8}$. 故选 D.

9. ABC 【解析】由题设得 $\frac{20+21+22+23+24+25}{6} = \frac{a+23+24+25+26+27}{6} - 3$, 解得 $a=28$. 对于 A, $6 \times 70\% = 4.2$, 故甲组数据的第 70 百分位数为 24, A 中结论错误; 对于 B, 甲组数据的极差为 $25-20=5$, 乙组数据的极差为 $28-23=5$, 所以甲、乙两组数据的极差相同, B 中结论错误; 对于 C, 乙组数据按从小到大排列为 23, 24, 25, 26, 27, 28, 故乙组数据的中位数为 $\frac{25+26}{2}=25.5$, C 中结论错误; 对于 D, 甲组数据的平均数为 $\frac{20+21+22+23+24+25}{6}=22.5$, 乙组数据的平均数为 $\frac{28+23+24+25+26+27}{6}=25.5$, 所以甲组数据的方差为 $\frac{1}{6} \times [(-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + 0.5^2 + 1.5^2 + 2.5^2] = \frac{35}{12}$, 乙组数据的方差为 $\frac{1}{6} \times [2.5^2 + (-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + 0.5^2 + 1.5^2] = \frac{35}{12}$, 故两组数据的方差相同, D 中结论正确. 故选 ABC.

10. ACD 【解析】依题意, 心形线 C 过原点 $O(0,0)$. 对于 A, B, 由 $\overrightarrow{OP_1} // \overrightarrow{OP_2}$, 可知 O, P_1, P_2 三点共线, 则 $x_1 x_2 < 0$. 设直线 $P_1 P_2$ 的方程为 $y=tx$, 由 $\begin{cases} x^2+y^2+y=\sqrt{x^2+y^2}, \\ y=tx, \end{cases}$ 消去 y , 得 $(1+t^2)x^2 - \sqrt{1+t^2}|x| + tx = 0$, 不妨设 $x_1 > 0, x_2 < 0$, 则 $x_1 = \frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$, $x_2 = \frac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2}$, 所以 $|P_1 P_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{2\sqrt{1+t^2}}{1+t^2} = 2$, $|OP_1| \cdot |OP_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot \left| \frac{\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2} \right| \cdot \sqrt{1+t^2} \cdot \left| \frac{-\sqrt{1+t^2}-t}{1+t^2} \right| = \frac{1}{1+t^2}$, 当 $t \neq 0$ 时, $|OP_1| \cdot |OP_2| \neq 1$, 故选项 A 正确, 选项 B 错误. 对于 C, D, 设点 $P(x, y)$ 在心

形线 C 上, $\angle POx = \alpha$, 由心形线 C 的方程可得 $|OP|^2 + |OP| \sin \alpha = |OP|$, 即 $|OP| \cdot (|OP| + \sin \alpha - 1) = 0$, 当 P 与 O 重合时, $|OP|=0$, 当 P 与 O 不重合时, $|OP|=1-\sin \alpha \leq 2$, 又 $x_1 x_2 \neq 0$, 所以 $|OP_1| + |OP_2| < 4$, 故选项 C 正确.

由 $|OP| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 2$, 可知 $-2 \leq y \leq 2$, 令 $m = \sqrt{x^2+y^2} (m \geq 0)$, 则心形线 C 的方程可化为 $m^2 - m + y = 0$, 又 $\Delta = 1 - 4y \geq 0$, 所以 $-2 \leq y \leq \frac{1}{4}$, 当 $y=0$ 时, 由 $m^2 - m = 0$, 解得 $m=0$ 或 $m=1$, 进而可得 $x = \pm 1$ 或 0 ; 当 $y = -1$ 时, 由 $m^2 - m - 1 = 0$, 得 $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 此时

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{x^2+1}$ 无整数解; 当 $y = -2$ 时, 由 $m^2 - m - 2 = 0$, 得 $m=2$, 所以 $x=0$. 所以 C 上有 4 个整点 $(-1, 0), (1, 0), (0, 0), (0, -2)$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

11. ABC 【解析】对于 A, 若 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$, $f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, $f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, 观察可知 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, A 正确; 对于 B, 若 $f(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$, $f^{(2)}(x) = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = (-1)^2(2!)x^{-3}$, $f^{(3)}(x) = (2x^{-3})' = -6x^{-4} = (-1)^3(3!)x^{-4}$, $f^{(4)}(x) = (-6x^{-4})' = 24x^{-5} = (-1)^4(4!)x^{-5}$, 观察可知 $f^{(n)}(x) = (-1)^n(n!)x^{-(n+1)}$, B 正确; 对于 C, $f(x) = e^x$ 的 n 阶导数为 $f^{(n)}(x) = e^x$, 得 $T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, C 正确; 对于 D, 记 $g(x) = \cos x$, 则 $g'(x) = -\sin x$, $g^{(2)}(x) = -\cos x$, $g^{(3)}(x) = \sin x$, 因为 $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $g^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $g^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处的 3 次泰勒多项式为 $T_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$, $T_3(1) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(1 - \frac{\pi}{3}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}(3-\pi)}{6} - \frac{(3-\pi)^2}{36} + \frac{\sqrt{3}(3-\pi)^3}{324} \approx$

$\frac{1}{2} - \frac{1.732 \times (-0.142)}{6} - \frac{(-0.142)^2}{36} + \frac{1.732 \times (-0.142)^3}{324} \approx 0.54$, D 错误. 故选 ABC.

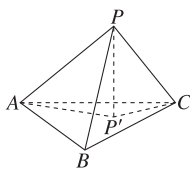
12. $\sqrt{34}$ 【解析】 $f(x) = x \ln x - 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln x + 1$, 则切线 l 的斜率 $k = f'(1) = 1$, 又 $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$, 所以切线 l 的方程为 $y - (-1) = x - 1$, 即 $x - y - 2 = 0$. 圆 C 的圆心为 $C(1, 0)$, 半径 $r = 3$, 设圆心 C 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|1 - 0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - \frac{1}{2}} = \sqrt{34}$.

13. 576 【解析】 符合题意的一种填法如图所示, 行交换有 $A_1^4 = 24$ (种) 方法, 列交换有 $A_1^4 = 24$ (种) 方法, 所以根据分步乘法计数原理得不同的填表方式共有 $A_1^4 \cdot A_1^4 = 24 \times 24 = 576$ (种).

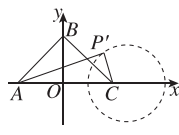
1	2	3	4
4	3	1	2
2	1	4	3
3	4	2	1

14. 16π 【解析】 如图①, 设点 P 在平面 ABC 内的射影为 P' , 连接 PP' , $P'A$, $P'C$, 则 $\angle PAP'$ 为直线 PA 与平面 ABC 所成的角, 即 $\angle PAP' = \alpha$, $\angle PCP'$ 为直线 PC 与平面 ABC 所成的角, 即 $\angle PCP' = \beta$, 因为 $\beta = 2\alpha = 60^\circ$, 所以 $\alpha = 30^\circ$, $P'P = \sqrt{3}P'C$, $P'P = \frac{\sqrt{3}}{3}P'A$, 所以 $3P'C = P'A$. 如图②, 在平面 ABC 内, 以 AC 所在直线为 x 轴, 线段 AC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系 xOy , 因为 $AB = BC = 2\sqrt{2}$, 且 $AB \perp BC$, 所以 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$, 得 $OB = OA = OC = 2$, 则 $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$. 令 $P'(x, y)$, 则 $3\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$, 化简得 $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$, 可知 P' 在以 $(\frac{5}{2}, 0)$ 为圆心, $\frac{3}{2}$ 为半径的圆上. 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$, 所以当 $P'C$ 最小时, $P'P$ 最小, 即三棱锥 $P-ABC$ 的体积最小, 易知当 P' 的坐标为 $(1, 0)$ 时, $P'C$ 取得最小值 1, 此时 $P'P = \sqrt{3}$, $P'A = 3$, $P'C = 1$, 得 $PA = 2\sqrt{3}$, $PC = 2$, 因为 $PA^2 + PC^2 = AC^2$, 所以 $\angle APC = 90^\circ$, 又 $\angle ABC = 90^\circ$, 所以此时三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心为棱 AC 的中点, 外接

球的半径 $R = \frac{1}{2}AC = 2$, 故三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times 2^2 = 16\pi$.



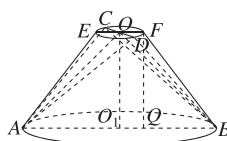
图①



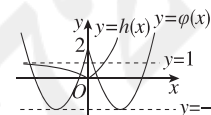
图②

小题5 “8+3+3”73 分练

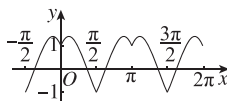
1. C 【解析】 依题意知 $C = \{3, 4, 5\}$, 集合 C 中有 3 个元素, 则其真子集的个数为 $2^3 - 1 = 7$. 故选 C.
2. A 【解析】 复数 $z = m + (m+1)i$ ($m \in \mathbf{R}$) 在复平面内对应的点为 $(m, m+1)$, 依题意可得 $m+1 = 2m$, 解得 $m = 1$. 故选 A.
3. A 【解析】 由题知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \cos(-2x) = \frac{e^x-1}{1+e^x} \cos 2x = -f(x)$, 所以 $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} \cos 2x$ 为奇函数, 排除 B, C; 当 $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 时, $f(x) < 0$, 排除 D. 故选 A.
4. A 【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$), 由 $a_1 = 3$, 且 $-3a_1, a_2, a_3$ 成等差数列, 得 $2a_2 = a_3 - 3a_1$, 即 $2a_1q = a_1q^2 - 3a_1$, 即 $6q = 3q^2 - 9$, 可得 $q = 3$, 所以 $S_n = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3^{n+1}-3}{2}$. 故选 A.
5. A 【解析】 因为 $x > 3$, 且 $xy + 2x - 3y = 12$, 所以 $y = \frac{12-2x}{x-3} = -2 + \frac{6}{x-3}$, 从而 $x+y = x-2 + \frac{6}{x-3} = (x-3) + \frac{6}{x-3} + 1 \geq 2\sqrt{6} + 1$, 当且仅当 $x = \sqrt{6} + 3$, $y = \sqrt{6} - 2$ 时等号成立, 所以 $x+y$ 的最小值为 $1+2\sqrt{6}$. 故选 A.
6. B 【解析】 如图, 取 CD 的中点 O , AB 的中点 O_1 , 连接 OA, OB, OO_1 , 由 AB, CD 分别是圆台上、下底面圆的直径, 且 $AB \perp CD$, 可得 $AC = AD = BC = BD$, 则 $OA \perp CD, OB \perp CD$, 又 $OA \cap OB = O$, 所以 $CD \perp$ 平面 AOB , 所以 $V_{A-BCD} = V_{C-AOB} + V_{D-AOB} = \frac{1}{3} S_{\triangle AOB} \cdot CD$. 设 EF 为圆 O 的直径, 且 $EF \perp CD$, 则 $EF \parallel AB$, 四边形 $ABFE$ 为等腰梯形, 过 F 作 $FQ \perp AB$ 于 Q , 因为 $EF = 2, AB = 8, BF = 5$, 所以 $BQ = 4 - 1 = 3$, 得 $FQ = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, 又 $OO_1 = FQ = 4, OO_1 \perp AB$, 所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$, 所以 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3} \times 16 \times 2 = \frac{32}{3}$. 故选 B.



7. D 【解析】 令 $f(x) = 0$, 得 $|2^x - 1| = a$, 令 $g(x) = 0$, 得 $x^2 - 4|x| + 2 = a$, 令 $h(x) = |2^x - 1| = \begin{cases} 2^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - 2^x, & x < 0, \end{cases} \varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & x \geq 0, \\ x^2 + 4x + 2, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f(x), g(x)$ 的零点个数即为 $h(x), \varphi(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 的交点个数, 作出 $h(x) = |2^x - 1|, \varphi(x) = x^2 - 4|x| + 2$ 的大致图象, 如图所示. 由图可知, 当 $g(x)$ 有 2 个零点时, $f(x)$ 无零点或只有 1 个零点; 当 $g(x)$ 有 3 个零点时, $f(x)$ 只有 1 个零点; 当 $f(x)$ 有 2 个零点时, $g(x)$ 有 4 个零点. 故选 D.



8. C 【解析】 因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 所以 $\omega = 2$, 所以函数 $f(x) = |\sin 2x| + \cos 2x = \begin{cases} \sin 2x + \cos 2x, & x \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], \\ -\sin 2x + \cos 2x, & x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi], \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 即 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}), & x \in [k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi], \\ -\sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}), & x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi], \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 作出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示. 对于 A, 由图可知, $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 上不单调, 故 A 错误; 对于 B, 由图可知, $f(x)$ 的图象无对称中心, 故 B 错误; 对于 C, $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 由 $f(-x) = |\sin(-\omega x)| + \cos(-\omega x) = |\sin \omega x| + \cos \omega x = f(x)$, 可知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{4} \in [\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}]$, 所以 $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, 所以 $\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \in [1, \sqrt{2}]$, 所以 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上的取值范围为 $[1, \sqrt{2}]$, 故 C 正确; 对于 D, 由图可知, $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 故 D 错误. 故选 C.



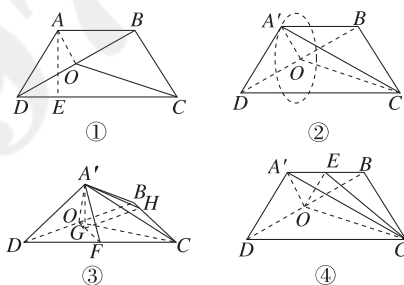
9. AB 【解析】 对于 A, 所有项的二项式系数之和为 2^8 , 则所有奇数项的二项式系数的和为 $\frac{2^8}{2} = 128$, 故 A 正确; 对于 B, 在

所有项的二项式系数中,最大的为 C_8^4 ,则二项式系数最大的项为第5项,故B正确;对于C, $\left(\frac{2}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_8^k \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} (-\sqrt[3]{x})^k = (-1)^k \cdot 2^{8-k} C_8^k x^{\frac{4}{3}k-8} (0 \leq k \leq 8, k \in \mathbf{N})$, 当 $\frac{4}{3}k-8 \in \mathbf{Z}$ 时, k 可能取的值为0,3,6,所以有理项共有三项,故C错误;对于D,令 $x=1$,则所有项的系数的和为 $\left(\frac{2}{1} - \sqrt[3]{1}\right)^8 = 1$,故D错误. 故选AB.

10. BCD 【解析】由题可知 $a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$, 所以 $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$, 设 $A(x_1, y_1) (-\sqrt{6} \leq x_1 \leq \sqrt{6}$ 且 $x_1 \neq 0)$, 则 $B(-x_1, -y_1), P(0, \sqrt{2})$, 因为 $A(x_1, y_1)$ 在椭圆上, 所以 $y_1^2 = 2\left(1 - \frac{x_1^2}{6}\right)$. 对于A, $|AB| = 2|AO| = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2\sqrt{x_1^2 + 2\left(1 - \frac{x_1^2}{6}\right)} = 2\sqrt{2 + \frac{2x_1^2}{3}} > 2\sqrt{2}$, 故A错误; 对于B, 连接 BF_2 , 可知四边形 AF_1BF_2 是平行四边形, 则 $|AF_1| + |BF_1| = |AF_1| + |AF_2| = 2\sqrt{6}$, 故B正确; 对于C, 因为 $c > b$, 所以以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆有4个交点, 则存在点A, 使得 $AF_1 \perp AF_2$, 故C正确; 对于D, $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1} \cdot \frac{-y_1 - \sqrt{2}}{-x_1} = \frac{y_1^2 - 2}{x_1^2} = \frac{2\left(1 - \frac{x_1^2}{6}\right) - 2}{x_1^2} = -\frac{1}{3}$, 故D正确. 故选BCD.

11. AC 【解析】在梯形ABCD中, 连接AO, 过A作 $AE \perp DC$ 于E, 如图①, 由题知 $AB=BC=AD=2, CD=4$, 则 $DE=1, \cos \angle ADE = \frac{1}{2}$, 故 $\angle ADE = \frac{\pi}{3}$, 得 $\angle DAB = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi}{6}$, 则 $OA \perp BD$. 又 $\angle BCD = \frac{\pi}{3}, \angle BDC = \frac{\pi}{6}$, 所以 $BC \perp BD$, 得 $OA = 2\sin \frac{\pi}{6} = 1, OB = 2\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $OC = \sqrt{BC^2 + OB^2} = \sqrt{7}$. 沿BD将 $\triangle ABD$ 翻折, 则点A的轨迹为圆, 且圆面一直和BD垂直, 如图②, 当 $A'O \perp OC$ 时, $A'C = 2\sqrt{2}$, 又 $A'O \perp BD, OC \cap BD = O, OC, BD \subset$ 平面BCD, 所以 $A'O \perp$ 平面BCD, 因为 $A'O \subset$ 平面 $A'BD$, 所以平面 $A'BD \perp$ 平面BCD, 又 $BC \subset$ 平面BCD, 平面BCD $\cap$ 平面 $A'BD = BD, BC \perp BD$, 所以 $BC \perp$ 平面 $A'BD$, 又 $A'D \subset$ 平面 $A'BD$, 所以 $A'D \perp BC$, 故A正确. 如图③, 在平面

BCD内, 过点O作 $OF \perp BD$, 交CD于F, 连接 $A'F$, 因为 $A'O \perp BD, A'O \cap OF = O$, 所以 $BD \perp$ 平面 $A'OF$, 又 $BD \subset$ 平面BCD, 所以平面 $A'OF \perp$ 平面BCD, 又平面 $A'OF \cap$ 平面BCD = OF , 所以点A'在平面BCD内的射影G在直线OF上, 过点G作BD的平行线交直线BC于H, 连接 $A'H, A'G$, 因为 $A'G \perp$ 平面BCD, $GH \perp BC$, 所以 $\angle A'HG$ 即为二面角 $A'-BC-D$ 的平面角, $\tan \angle A'HG = \frac{A'G}{GH}$. 易知四边形OGHB为矩形, 所以 $GH = OB = \sqrt{3}$, 因为 $A'G \leq A'O = 1$, 所以 $\tan \angle A'HG = \frac{A'G}{GH} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\angle A'HG$ 有最大值, 且最大值为 $\frac{\pi}{6}$, 故B, D均错误. 因为 $S_{\triangle BCD}$ 不变, 所以当三棱锥 $A'-BCD$ 的高最大时, 其体积最大, 易知当 $A'O \perp$ 平面BCD时, 三棱锥 $A'-BCD$ 的高最大, 为 $A'O$. 如图④, 取 $A'B$ 的中点E, 连接OE, CE, 则 $OE \parallel A'D$, 故 $\angle COE$ (或其补角) 即为异面直线 $A'D$ 与CO所成的角, 当 $A'O \perp$ 平面BCD时, 由对A选项的分析知 $BC \perp$ 平面 $A'BD$, 又 $A'B \subset$ 平面 $A'BD$, 所以 $A'B \perp BC$, 在 $\triangle OCE$ 中, $OE = \frac{1}{2} A'B = 1, OC = \sqrt{7}, CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, 所以 $\cos \angle COE = \frac{OC^2 + OE^2 - CE^2}{2OC \cdot OE} = \frac{7+1-5}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{14} > \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle COE < \frac{\pi}{3}$, 故C正确. 故选AC.



12. 23 【解析】样本数据按从小到大排列为14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 28, 一共有8个数据, $8 \times 0.75 = 6$, 所以样本数据的75%分位数为 $\frac{1}{2} \times (22+24) = 23$.

13. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】设 a 与 b 的夹角为 θ , 且 $\theta \in [0, \pi], |a| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, 则 b 在 a 上的投影向量为 $|b| \cos \theta \cdot \frac{a}{|a|} = \cos \theta \cdot \frac{|b|}{|a|} \cdot a = \cos \theta \cdot \frac{|b|}{|a|} \cdot (1, 1) = (-2, -2) = -2(1, 1)$, 即 $\cos \theta \cdot \frac{|b|}{|a|} = -2$, 所以 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

14. (1, 4) 【解析】设点 $P(x_0, y_0)$, 则点P到 l_1 的距离 $d = \frac{|2x_0 - y_0|}{\sqrt{5}}$, 直线PD的方程为 $y = -2x + 2x_0 + y_0$, 由 $\begin{cases} y = -2x + 2x_0 + y_0 \\ y = 2x \end{cases}$ 解得 $x_D = \frac{2x_0 + y_0}{4}$, 所以 $|OD| = \sqrt{5} \frac{|2x_0 + y_0|}{4}$, 所以 $S_{\text{平行四边形ODPE}} = |OD|d = \sqrt{5} \frac{|2x_0 + y_0|}{4} \times \frac{|2x_0 - y_0|}{\sqrt{5}} = 1$, 所以 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} = \pm 1$, 所以点P的轨迹 Γ 为两个双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$. 因为双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的实半轴长为1, 双曲线 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ 的实半轴长为2, 若 Γ 与圆 $x^2 + y^2 = t (t > 0)$ 有四个交点, 则 $1 < \sqrt{t} < 2$, 即 $1 < t < 4$, 所以实数 t 的取值范围是 (1, 4).

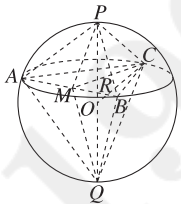
小题6 “8+3+3”73分练

1. C 【解析】由题意得 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 又 $B = \{x | x = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $\therefore A \cap B = \{2\}$. 故选C.
2. D 【解析】因为复数 $z = (2+3i)(3+2i) = 6+4i+9i-6 = 13i$, 所以 z 的实部为0, 虚部为13, 故A, B均错误; $\bar{z} = -13i, |\bar{z}| = 13$, 故C错误, D正确. 故选D.
3. B 【解析】 $9x^2 + 4y^2 = 36$ 化为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 椭圆的焦点在 y 轴上, 设所求椭圆的方程为 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$, 依题意有 $\begin{cases} b = 2\sqrt{5} \\ a^2 - b^2 = 5 \end{cases}$, 所以 $a^2 = 25, b^2 = 20$, 所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{25} = 1$. 故选B.
4. D 【解析】如图, 因为 $\overrightarrow{BP} = 4\overrightarrow{PN}$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AN}$, 又 $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, 所以 $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CA}$. 故选D.
5. D 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题得 $a_1 \neq 0, q \neq 0$, 因为 $a_{2n} = a_n^2$, 所以 $a_1 \cdot q^{2n-1} = (a_1 q^{n-1})^2$, 即 $a_1 \cdot q^{2n-1} = a_1^2 q^{2n-2}$, 化简得 $a_1 = q$. 因为 $-a_2$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项, 所以 $-2a_2 = a_1 + a_3$, 即 $-2a_1 q = a_1 + a_1 q^2$, 化简得 $q^2 + 2q + 1 = 0$, 解得 $q = -1$, 则 $a_1 = -1$, 所以 $a_5 = a_1 \cdot q^4 = -1 \times 1 = -1$, 故选D.

6. A 【解析】由 $5\cos 2\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, 得 $5(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$, 即 $5(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha$, 因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\cos\alpha - \sin\alpha < 0$, 所以 $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{5}$, 结合 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, 且 $\cos\alpha < 0, \sin\alpha > 0$, 得 $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$, 所以 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}$. 故选 A.

7. D 【解析】对于 A, 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $a = \frac{\pi}{6} + \frac{6}{\pi} > \frac{3}{6} + \frac{6}{4} = 2, c = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$, 此时 $a > c$, 故 A 中命题为真命题; 对于 B, 当 $x = 0$ 时, $b = 2, c = \sqrt{3}$, 此时 $b > c$, 故 B 中命题为真命题; 对于 C, 当 $x = -\frac{\pi}{6}$ 时, $a = -\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi} < 0, c = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$, 此时 $a < c$, 故 C 中命题为真命题; 对于 D, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $b = e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$, 当且仅当 $e^x = e^{-x}$, 即 $x = 0$ 时取等号, 由 $x \in [-1, 1]$, 得 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[-1 + \frac{\pi}{3}, 1 + \frac{\pi}{3}\right]$, 而 $\frac{\pi}{2} < 1 + \frac{\pi}{3} < \pi, 0 < -1 + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $c = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$, 当且仅当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时取等号, 而 $0 \neq \frac{\pi}{6}$, 所以 $\forall x \in [-1, 1], b > c$, 故 D 中命题为假命题. 故选 D.

8. D 【解析】连接 PQ, 由题意可得 $PQ \perp$ 平面 ABC, 且球心 O 是 PQ 的中点, 设 PQ 与平面 ABC 的交点为 R, 则 R 为 $\triangle ABC$ 的中心, 连接 CR 并延长交 AB 于 M, 得 $CM \perp AB$, M 为 AB 的中点, 连接 PM, QM, 由题意可得 $PM \perp AB, MQ \perp AB$, 所以 $\angle PMC, \angle QMC$ 分别为两个正三棱锥的侧面与底面 ABC 所成的角, 即 $\angle PMC = \alpha, \angle QMC = \beta$, 所以 $\tan\alpha = \frac{PR}{MR}, \tan\beta = \frac{QR}{MR}$. 设球 O 的半径为 r, 球心 O 到平面 ABC 的距离为 m ($m \geq 0$), 不妨令 $PR \leq QR$, 则 $PR = r - m, QR = r + m$, 设 $\triangle ABC$ 的边长为 a ($a > 0$), 则 $CR = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, 由正三角形的性质得 $MR = \frac{1}{2}RC = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, 所以 $\tan\alpha =$

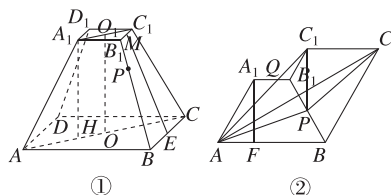


$$\frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}, \tan\beta = \frac{r+m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}, \text{连接 } OC, \text{ 则 } r^2 = m^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = m^2 + \frac{1}{3}a^2, \text{ 所以 } r \geq \frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}, \text{ 所以 } \tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} + \frac{r+m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}}{1 - \frac{r-m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a} \times \frac{r+m}{\frac{\sqrt{3}}{6}a}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a \times 2r}{\frac{\sqrt{3}}{6}a \times \frac{\sqrt{3}}{6}a - (r^2 - m^2)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a \times 2r}{\frac{1}{12}a^2 - (r^2 - r^2 + \frac{1}{3}a^2)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a \times 2r}{-\frac{1}{4}a^2} < 0, \text{ 所以 } \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi, \text{ 故当 } r = \frac{\sqrt{3}}{3}a \text{ 时, } \alpha + \beta \text{ 最大, 此时 } \tan(\alpha + \beta) = -\frac{4}{3}. \text{ 故选 D.}$$

9. BD 【解析】将 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 所以 A 错误; 将 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = g(x)$ 的图象, 所以 B 正确; 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称的图象对应的函数为 $y = f\left(2 \times \frac{5\pi}{12} - x\right) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} - x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi - x) = \sin x$, 所以 C 错误; 与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称的图象对应的函数为 $y = f\left(2 \times \frac{7\pi}{12} - x\right) = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{12} - x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = g(x)$, 所以 D 正确. 故选 BD.

10. ABD 【解析】对于 A, B, 如图①, 由题可知, 四边形 ABCD 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 均为正方形, 所以 $S_{\text{正方形}ABCD} = 36, S_{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1} = 4$, 分别取 BC, B_1C_1 的中点 E, M, 连接 ME, 则 ME 为棱台的

斜高, 因为侧面 BCC_1B_1 为等腰梯形, 所以 $ME = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$, 所以侧面 BCC_1B_1 的面积为 $(2+6) \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 8\sqrt{3}$, 故正四棱台的表面积为 $36 + 4 + 8\sqrt{3} \times 4 = 40 + 32\sqrt{3}$, 故 A 正确; 连接 AC, A_1C_1 , 分别取 AC, A_1C_1 的中点 O, O_1 , 连接 OO_1 , 过点 A_1 作 $A_1H \perp AC$ 于 H, 则正四棱台的高为 $OO_1, A_1O_1 = \sqrt{2}, AO = 3\sqrt{2}$, 则 $AH = 2\sqrt{2}$, 在梯形 A_1O_1OA 中, $OO_1 = A_1H = \sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$, 所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (4+36+\sqrt{4 \times 36}) = \frac{104\sqrt{2}}{3}$, 故 B 正确. 对于 C, D, 如图②, 将侧面 ABB_1A_1 和侧面 BCC_1B_1 展开且处于同一平面, 连接 AC_1 , 与 A_1B_1 交于点 Q, 在等腰梯形 ABB_1A_1 中, 过 A_1 作 $A_1F \perp AB$ 于 F, 则 $AF = 2$, 又 $AA_1 = 4$, 所以 $\angle A_1AF = \frac{\pi}{3}$, 得 $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle B_1BC = \frac{2\pi}{3}$, 从而得 $AA_1 \parallel BC$, 又 $B_1C_1 \parallel BC$, 所以 $AA_1 \parallel B_1C_1$, 则 $\triangle AA_1Q \sim \triangle C_1B_1Q$, 所以 $\frac{AQ}{C_1Q} = \frac{A_1Q}{B_1Q} = \frac{AA_1}{B_1C_1} = 2$, 得 $A_1Q = \frac{2}{3}A_1B_1 = \frac{4}{3}, \angle AA_1B_1 = \pi - \angle A_1AB = \frac{2\pi}{3}$, 在 $\triangle A_1AQ$ 中, 由余弦定理得 $4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - AQ^2 = 2 \times 4 \times \frac{4}{3} \cos \angle AA_1B_1 = -\frac{1}{2}$, 可得 $AQ = \frac{4\sqrt{13}}{3}$, 则 $C_1Q = \frac{1}{2}AQ = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, 所以 $AC_1 = AQ + QC_1 = 2\sqrt{13}$, 因为 P 为棱 BB_1 上的动点 (含端点), 所以 A, P, C_1 三点不能共线, 所以 $AP + PC_1 > AC_1 = 2\sqrt{13}$, C 错误; 连接 AC, 当 A, P, C 三点共线时, $AP + PC$ 最小, 由余弦定理得, $\cos \angle ABC = \frac{36+36-AC^2}{2 \times 6 \times 6} = -\frac{1}{2}$, 可得 $AC = 6\sqrt{3}$, 所以 $AP + PC$ 的最小值为 $6\sqrt{3}$, 故 D 正确. 故选 ABD.



11. ABD 【解析】因为 $f(x) - f(-x) = 2x$, 所以 $f'(x) + f'(-x) = 2$, 即 $g(x) + g(-x) = 2$, 令 $x = 0$, 得 $g(0) = 1$, 故 A 正确; 对于 $f(x) - f(-x) =$

2x, 当 $x \neq 0$ 时, $\frac{f(x)}{x} + \frac{f(-x)}{-x} = 2$, 所以 $y = \frac{f(x)}{x}$ 的图象关于点 (0, 1) 对称,

故 B 正确; 对于 C, 假设 $f(x) + f(2-x) = 0$, 求得 $f'(x) - f'(2-x) = 0$, 即 $g(x) - g(2-x) = 0$, 又 $g(x) + g(2-x) = 0$, 所以 $g(x) = 0$, 所以 $g(0) = 0$, 与 $g(0) = 1$ 矛盾, 假设不成立, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $g(x) + g(-x) = 2$, $g(x) + g(2-x) = 0$, 所以 $g(2-x) - g(-x) = -2$, 又 $g(0) = 1$, 所以 $g(1) = 0$, $g(2) = -1$, 所以 $g(n+2) - g(n) = -2$, 所以数列 $\{g(n)\} (n \in \mathbf{N}^+)$ 的奇数项是以 0 为首项, -2 为公差的等差数列, 数列 $\{g(n)\} (n \in \mathbf{N}^+)$ 的偶数项是以 -1 为首项, -2 为公差的等差数列, 又 $g(2) - g(1) = -1$, 所以数列 $\{g(n)\} (n \in \mathbf{N}^+)$ 是以 0 为首项, -1 为公差的等差数列, 所以 $g(n) = 1 - n$, 所以 $\sum_{k=1}^n g(k) = \frac{n-n^2}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

12. 0.271 8 【解析】技术改造前, 易知 $\mu_1 = 50, \sigma_1 = 0.4$, 则其优品率为 $P(49.6 < X < 50.4) = P(\mu_1 - \sigma_1 < X < \mu_1 + \sigma_1) = P(|X - \mu_1| < \sigma_1) \approx 0.682 7$. 技术改造后, 易知 $\mu_2 = 50, \sigma_2 = 0.2$, 则其优品率为 $P(49.6 < X < 50.4) = P(\mu_2 - 2\sigma_2 < X < \mu_2 + 2\sigma_2) = P(|X - \mu_2| < 2\sigma_2) \approx 0.954 5$. 所以所求的优品率之差约为 $0.954 5 - 0.682 7 = 0.271 8$.

13. 2 【解析】由题可知 A, B, C, F 四点共线, 且 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$, 如图, 过 A 作 $AD \perp l$ 于 D, 过 B 作 $BE \perp l$ 于 E, 则 $|AD| = |AF|$, $|BE| = |BF|$, 所以 $|AD| = 3|BE|$, 又 $\text{Rt} \triangle ACD \sim \text{Rt} \triangle BCE$, 所以 $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|AD|} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{|AB| + |BC|}{|BC|} = 3$, 得 $\frac{|AB|}{|BC|} = 2$, 即 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, 故 $\mu = 2$.

14. $5 \times 3^{n-1} - 5 \times 3^{2n-1} + 1$ 【解析】因为 C_1 共 5 项, 按规则 f 对数列 C_1 进行变换, C_1 中的每一项都变为 3 项, 以此类推, 得 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ 的项数构成首项为 5, 公比为 3 的等比数列, 所以 C_n 的项数为 $5 \times 3^{n-1}$. 根据变换规则, 若数列 C_n 中, 2 与 0 的个数相同, 则数列 C_{n+1} 中, 2 与 0 的个数也相同; 若数列 C_n 中, 2 比 0 多 n 个, 则数列 C_{n+1} 中, 2 比 0 少 n 个; 若数列 C_n 中, 2 比 0 少 n 个, 则数列 C_{n+1} 中, 2 比 0 多 n 个. 因为数列 C_1 中有 5 项, 其中 2 个 2, 3 个 0, 2 比 0 少 1 个, 所以数列 C_2 的 15 项中, 2 比 0 多 1 个. 以此类推, 若 n 为奇数, 则数列 C_n 中, 2 比 0 少 1 个; 若 n 为偶数,

则数列 C_n 中, 2 比 0 多 1 个. 所以数列 C_{2n} 中, 2 比 0 多 1 个, 所以 $S_{2n} = \frac{5 \times 3^{2n-1} + 1}{2} \times 2 = 5 \times 3^{2n-1} + 1$.

小题 7 “8+3+3”73 分练

1. A 【解析】 $z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$, 则 $|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$. 故选 A.
2. D 【解析】由题意可得 $A = \{x | 3x^2 - 8x + 4 < 0\} = \left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 2\right\}$, $B = \{x | \lg x \leq 0\} = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 所以 $A \cup B = (0, 2)$. 故选 D.
3. B 【解析】对于 A, 若 $\alpha // \beta, l // \alpha, m // \beta$, 则 l 与 m 可能平行, 也可能相交, 还可能异面, 故 A 错误; 对于 B, 若 $l // m, m \perp \beta$, 则 $l \perp \beta$, 又 $\alpha // \beta$, 所以 $l \perp \alpha$, 故 B 正确; 对于 C, D, 若 $\alpha \perp \beta, l // \alpha, m // \beta$, 则 l 与 m 可能平行, 也可能相交, 还可能异面, 故 C, D 错误. 故选 B.
4. B 【解析】先从 3 个不同的公益广告中选 2 个安排到第一个和最后一个播放, 有 A_3^2 种方法, 然后将 3 个不同的商业广告排成一排, 有 A_3^3 种方法, 3 个不同的商业广告之间有两个空, 选择一个将剩下的 1 个公益广告安排进去即可, 所以共有 $A_3^2 A_3^3 A_2^1 = 72$ (种) 不同的播放方式. 故选 B.
5. B 【解析】设火星的公转周期为 T_1 , 椭圆轨道的长半轴长为 a_1 , 水星的公转周期为 T_2 , 椭圆轨道的长半轴长为 a_2 , 则 $T_1 \approx 8T_2$, 且 $\begin{cases} T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a_1^{\frac{3}{2}}, \\ T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a_2^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$ 所以 $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 8$, 所以 $\frac{a_1}{a_2} \approx 4$, 即 $a_1 \approx 4a_2$. 故选 B.
6. C 【解析】 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x - 1 = \cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x = 2\sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega < 0$), $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π , $\therefore \frac{2\pi}{-2\omega} = \pi$, 得 $\omega = -1$, $\therefore f(x) = 2\sin\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. 对于 A, 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -2 \neq 0$, $\therefore f(x)$ 的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 对称, 故 A 错误; 对于 B, 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{\pi}{3}, 2\right]$ 上单调递增, 故 B 错

误; 对于 C, 由 B 选项知函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 C 正确; 对于 D, 令 $2x - \frac{\pi}{6} =$

$k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 得 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\therefore f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbf{Z}$), 易知直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 不是函数 $f(x)$ 图象的对称轴, 故 D 错误. 故选 C.

7. C 【解析】因为 $f(x) = \sin \pi x + e^{3x-3} - e^{3-3x} - x + 3$, 所以 $f(x+1) = \sin(\pi x + \pi) + e^{3x+3-3} - e^{3-3x-3} - x - 1 + 3 = -\sin \pi x + e^{3x} - e^{-3x} - x + 2$. 设 $g(x) = f(x+1) - 2 = -\sin \pi x + e^{3x} - e^{-3x} - x$, 显然 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则 $g(x-1) = f(x) - 2$, 因为 $g(-x) = -\sin(-\pi x) + e^{-3x} - e^{3x} + x = -(-\sin \pi x + e^{3x} - e^{-3x} - x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 又 $g'(x) = -\pi \cos \pi x + 3e^{3x} + 3e^{-3x} - 1 \geq -\pi \cos \pi x + 2\sqrt{3e^{3x} \cdot 3e^{-3x}} - 1 = 5 - \pi \cos \pi x > 0$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号), 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 因为 $f(x) + f(3-2x) < 4$, 所以 $[f(x)-2] + [f(3-2x)-2] < 0$, 所以 $g(x-1) + g(2-2x) < 0$, 即 $g(x-1) < -g(2-2x) = g(2x-2)$, 所以 $x-1 < 2x-2$, 解得 $x > 1$, 则满足 $f(x) + f(3-2x) < 4$ 的 x 的取值范围是 $(1, +\infty)$. 故选 C.

8. B 【解析】连接 F_2M , 由点 F_2 关于 l 的对称点 M 在线段 F_1P 的延长线上, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, 得 $\angle F_2PM = 120^\circ$, 则 $\angle PF_2M = 30^\circ$. 设直线 l 与 x 轴的交点为 H , 因为 l 的倾斜角为 135° , 所以 $\angle HF_2M = 45^\circ$, 故在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 有 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, $\angle PF_2F_1 = 105^\circ$, $\angle PF_1F_2 = 15^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{|PF_1|}{\sin \angle PF_2F_1} = \frac{|PF_2|}{\sin \angle PF_1F_2} = \frac{|F_1F_2|}{\sin \angle F_1PF_2}$, 所以 $\frac{|PF_1| + |PF_2|}{\sin 15^\circ + \sin 105^\circ} = \frac{|F_1F_2|}{\sin 60^\circ}$, 即 $\frac{2a}{\sin 15^\circ + \sin 105^\circ} = \frac{2c}{\sin 60^\circ}$, 又 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, 所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ + \sin 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.
9. BCD 【解析】对于 A, 将数据从小到大排列为 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 共有 8 个数据, 因为 $8 \times 45\% = 3.6$, 所以数据的第 45 百分位数为第 4 个数据, 即为 2, 所以 A 不

正确. 对于 B, 若数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的标准差为 s , 则数据 $2x_1, 2x_2, 2x_3, \dots, 2x_n$ 的标准差为 $\sqrt{2^2 s^2} = 2s$, 所以 B 正确. 对于 C, 随机变量 X 服从正态分布 $N(1, 2)$, 若 $P(X > 0) = \frac{3}{4}$, 则根据正态曲线的对称性, 可得 $P(0 < X < 2) = 2P(X > 0) - 1 = \frac{1}{2}$, 所以 C 正确. 对于 D, 随机变量 Y 服从二项分布 $B(4, p)$, 若方差 $D(Y) = \frac{3}{4}$, 则 $4p(1-p) = \frac{3}{4}$, 解得 $p = \frac{1}{4}$ 或 $p = \frac{3}{4}$. 当 $p = \frac{1}{4}$ 时, 可得 $P(Y=2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$; 当 $p = \frac{3}{4}$ 时, 可得 $P(Y=2) = C_4^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$. 综上可得, $P(Y=2) = \frac{27}{128}$, 所以 D 正确. 故选 BCD.

10. ACD 【解析】对于 A 选项, 连接 SO , OA , 则 SO 与底面垂直, 所以 SA 与圆锥底面所成的角为 $\angle SAO = 30^\circ$. 因为 $SA \perp SB$, 所以 $\triangle SAB$ 的面积为 $\frac{1}{2} SA \cdot SB = \frac{1}{2} \times SA^2 = 2$, 可得 $SA = 2$, 所以该圆锥的高为 $SO = SA \cdot \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, 故 A 正确. 对于 B 选项, 该圆锥的底面半径为 $OA = SA \cdot \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 故该圆锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi \times OA^2 \times SO = \frac{1}{3} \pi \times (\sqrt{3})^2 \times 1 = \pi$, 故 B 错误. 对于 C 选项, 设该圆锥侧面展开图的圆心角为 θ , 因为底面圆的周长为 $2\pi \times OA = 2\sqrt{3}\pi$, 所以 $\theta = \frac{2\sqrt{3}\pi}{SA} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{2} = \sqrt{3}\pi$, 故 C 正确. 对于 D 选项, 取 AB 的中点 E , 连接 OE, SE , 因为 $SA = SB$, E 为 AB 的中点, 所以 $SE \perp AB$, 同理 $OE \perp AB$, 所以二面角 $S-AB-O$ 的平面角为 $\angle SEO$. 因为 $SO \perp$ 平面 OAE , $OE \subset$ 平面 OAE , 所以 $SO \perp OE$. 因为 $SA \perp SB$, $SA = SB$, 所以 $\triangle SAB$ 为等腰直角三角形, 则 $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $SE = \frac{1}{2} AB = \sqrt{2}$, 所以 $\sin \angle SEO = \frac{SO}{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 可得 $\angle SEO = 45^\circ$, 所以二面角 $S-AB-O$ 的大小为 45° , 故 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】由 $f(x) = ax^3 + x^2 + cx + \frac{1}{27}$ ($a \neq 0$), 得 $f'(x) = 3ax^2 + 2x + c$ ($a \neq 0$), $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{1}{3a}, f\left(-\frac{1}{3a}\right)\right)$. 对于 A, 因为

$f(x)$ 有三个不同的零点, 所以 $f(x)$ 有两个极值点, 所以 $f'(x) = 0$ 有两个不同的根, 所以 $\Delta = 4 - 12ac > 0$, 得 $3ac < 1$, 故 A 正确. 对于 B, 由 x_1, x_2, x_3 成等差数列及三次函数图象的对称性可知 $x_2 = -\frac{1}{3a}$, 所以 $f(x_2) = f\left(-\frac{1}{3a}\right) = \frac{2+a^2-9ac}{27a^2} = 0$, 又 $ac < \frac{1}{3}$, 所以 $2+a^2=9ac < 3$, 所以 $a^2 < 1$, 所以 $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, 故 B 正确. 对于 C, 令 $g(x) = 0$, 得 $ax^3 + x^2 + cx - \frac{26}{27} = 0$ ($a \neq 0$), 若 $g(x)$ 恰有两个不同的零点 m, n , 则 m 或 n 必为 $g(x)$ 的极值点, 若 m 为 $g(x)$ 的极值点, 则方程 $ax^3 + x^2 + cx - \frac{26}{27} = 0$ ($a \neq 0$) 的三个根为 m, m, n , 可得 $2m+n = -\frac{1}{a}$; 若 n 为 $g(x)$ 的极值点,

同理可得 $m+2n = -\frac{1}{a}$, 故 C 错误. 对于 D, 若 $g(x)$ 有三个不同的零点 t_1, t_2, t_3 , 则由根与系数的关系得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = t_1 + t_2 + t_3 = -\frac{1}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

所以 $(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)$, 可得 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$, 故 D 正确. 故选 ABD.

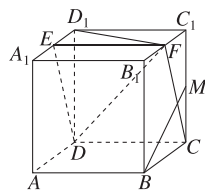
12. -3 【解析】由题知 $2a+b = (2, 4) + (4, -2) = (6, 2)$, 则 $c \cdot (2a+b) = (1, \lambda) \cdot (6, 2) = 6+2\lambda = 0$, 解得 $\lambda = -3$.

13. 3 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1-3 = -2$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 3n - [(n-1)^2 - 3(n-1)] = 2n-4$, 显然 $a_1 = -2$ 也满足上式, 故 $a_n = 2n-4, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $b_n = a_n \cdot (\sqrt{3})^{-a_n} = (2n-4) \cdot (\sqrt{3})^{-2n+4} = (2n-4) \cdot 3^{-n+2} = \frac{2n-4}{3^{n-2}}$. 因为 $\frac{b_k}{2}$ 是 b_{k+1}, b_{k+2} 的等差中项, 所以 $b_k = b_{k+1} + b_{k+2}$, 即 $\frac{2k-4}{3^{k-2}} = \frac{2k-2}{3^{k-1}} + \frac{2k}{3^k}$, 则 $2k-4 = \frac{2k-2}{3} + \frac{2k}{9}$, 解得 $k=3$.

14. $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$ 【解析】如图, 分别取 A_1D_1, B_1C_1 的中点 E, F , 连接 DE, EF, CF . 由题易知 $BM \perp CF, BM \perp CD, \therefore CF \cap CD = C, \therefore BM \perp$ 平面 $CDEF$, 又 $DP \perp BM, \therefore$ 点 P 在平面 $CDEF$ 内. 由 $D_1P=1$, 得点 P 在以 D_1 为球心, 1 为半径的球面上, $\therefore$ 动点 P 的轨迹为平面 $CDEF$ 与球 D_1 的球面的交线. 连接 DF, D_1F , 设点 D_1 到平面 DEF 的距离为 h , 平面 DEF 截球 D_1 所得截面圆的半径为 r , 则由 $V_{\text{三棱锥 } D_1-DEF} = V_{\text{三棱锥 } F-DED_1}$, 得 $\frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle DEF} = \frac{1}{3} \times 2 \times$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1, \therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \sqrt{5},$$

$$\therefore h = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 则 } r = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \text{ 动点 } P \text{ 的轨迹长度为 } \frac{2\sqrt{5}\pi}{5}.$$



小题8 “8+3+3”73 分练

1. A 【解析】由 $x^2 + 2x - 3 < 0$, 得 $-3 < x < 1$, 故 $A = (-3, 1)$. 由 $B = [0, 2]$, 得 $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, 所以图中阴影部分表示的集合为 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = (-3, 0)$. 故选 A.

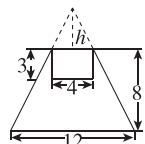
2. D 【解析】由题知 $z = \frac{5}{3+4i} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$, 则 z 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, 位于第四象限. 故选 D.

3. B 【解析】由 $X \sim N(3, 2^2)$ 可知 $E(X) = 3, D(X) = 4$, 又因为 $Y = \frac{1}{2}(X-3)$, 所以 $E(Y) = E\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}E(X) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$, $D(Y) = D\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}D(X) = 1$, 则 $\frac{E(Y)+1}{D(Y)+1} = \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. 故选 B.

4. C 【解析】 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\omega + \frac{\pi}{3}\right)$, 因为 x_1, x_2 是 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的两个极值点, 不妨设 $x_1 < x_2$, 所以 $\begin{cases} \omega x_1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \\ \omega x_2 + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$ 所

以 $\omega(x_1 + x_2) = \frac{4\pi}{3}$, 所以 $f(x_1 + x_2) = 2\sin\left[\omega(x_1 + x_2) + \frac{\pi}{3}\right] = 2\sin \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$. 故选 C.

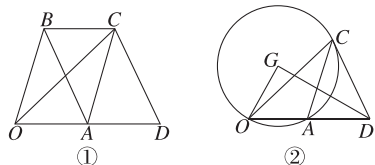
5. C 【解析】作出圆台的轴截面, 如图, 设截面的上底与腰的延长线构成的等腰三角形底边上的高为 h cm, 由相似三角形的性质, 得 $\frac{h}{h+8} = \frac{2}{6}$, 解得 $h=4$. 设水到达最大容积时水面的半径为 r cm, 则 $\frac{4+3+1}{4+8} = \frac{r}{6}$, 解得 $r=4$, 所以水的最大容积 $V = \frac{1}{3}\pi(8-3-1) \times (4^2 + 4 \times 6 +$



$$6^2) = \frac{304\pi}{3} (\text{cm}^3). \text{ 故选 C.}$$

6. B 【解析】由图可知,当质点 $P(x, y)$ 在两个“封闭”曲线上运动时,投影点 $Q(x, 0)$ 的速度先由正到负再到正,排除 A;在第 2 个圈的交点后的那一段图象,其投影点 Q 的速度必定越来越小,排除 D;质点 $P(x, y)$ 在开始时沿直线运动,故投影点 $Q(x, 0)$ 的速度为常数,排除 C. 故选 B.

7. C 【解析】如图①,作出平行四边形 $OACB$,连接 OC ,设 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$,则 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}$. 在平行四边形 $OACB$ 中, $OA = 1$, $\angle OCA = \frac{\pi}{6}$,延长 OA 至 OD ,使 $OA = AD$,连接 AB, CD ,则 $\vec{CD} = \vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. 由正弦定理,得 $\triangle OAC$ 的外接圆的直径 $2R = \frac{OA}{\sin \angle OCA} = 2$,所以外接圆半径 $R = 1$. 设外接圆圆心为 G ,连接 OG, DG ,如图②,易知 $\angle GOD = \frac{\pi}{3}$,又 $OG = 1, OD = 2$,所以由余弦定理可得 $DG = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$,所以 $|\vec{CD}| \leq DG + R = \sqrt{3} + 1$,故 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最大值为 $\sqrt{3} + 1$. 故选 C.



8. B 【解析】设 $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$ 的内切圆圆心分别为 O_1, O_2 ,设 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴相切于点 H ,由双曲线的定义得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$,由圆的切线长定理得 $|HF_1| - |HF_2| = 2a$,所以 H 的横坐标为 a ,则点 H 是双曲线的右顶点. 同理可得点 H 也是 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆与 x 轴的切点. 连接 O_1O_2, O_1F_2, O_2F_2 ,则 $O_1O_2 \perp x$ 轴,设直线 AB 的倾斜角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$,则 $\angle O_1F_2H = \frac{\pi - \theta}{2}, \angle O_2F_2H = \frac{\theta}{2}$,又 $|F_2H| = c - a$,所以 $r_1 = |O_1H| = (c - a) \tan \frac{\pi - \theta}{2}, r_2 = |O_2H| = (c - a) \tan \frac{\theta}{2}$,所以 $3(c - a) \tan \frac{\pi - \theta}{2} = 4(c - a) \tan \frac{\theta}{2}$,可得 $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $k_{AB} = \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}} = 4\sqrt{3}$,又 $\frac{b}{a} < k_{AB} = 4\sqrt{3}$,离

$$\text{心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \text{ 所以 } e \in (1, 7).$$

故选 B.

9. BC 【解析】对于 A,由 $x^4 + y^4 = 1$,令 $y = 0$,可得 $x^4 = 1$,解得 $x = 1$ 或 $x = -1$,所以曲线 E 与 x 轴只有 $(1, 0)$ 和 $(-1, 0)$ 这 2 个交点,故 A 错误;对于 B,因为 $(-x)^4 + (-y)^4 = x^4 + y^4 = 1$,所以点 (x, y) 和点 $(-x, -y)$ 均在曲线 E 上,所以曲线 E 关于原点 O 对称,故 B 正确;对于 C,因为 $x^4 + y^4 = 1$,所以 $|x| \leq 1$ 且 $|y| \leq 1$,所以曲线 E 上的点都在直线 $x = 1, x = -1, y = 1, y = -1$ 所围成的矩形内(包含边上的点),所以曲线 E 上的点都在某个矩形内,故 C 正确;对于 D,因为 $|x| \leq 1$,且 $|y| \leq 1$,所以 $x^2 \geq x^4, y^2 \geq y^4$,所以 $x^2 + y^2 \geq x^4 + y^4 = 1$,所以曲线 E 上的点到原点 O 的距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$,故 D 错误. 故选 BC.

10. BC 【解析】对于 A 选项, $\bar{y}_A = 2\bar{x}_A - 0.6 = 2 \times 5.2 - 0.6 = 9.8, \bar{y}_B = 1.5\bar{x}_B + 0.4 = 1.5 \times 6 + 0.4 = 9.4, \therefore \bar{y}_A > \bar{y}_B$,故 A 错误;对于 B 选项,点 P 到直线 l_A 的距离 $d_A = \frac{|8.6 - 2 \times 5.6 + 0.6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,点 P 到直线 l_B 的距离 $d_B = \frac{|8.6 - 1.5 \times 5.6 - 0.4|}{\sqrt{1^2 + (-1.5)^2}} = \frac{0.2}{\sqrt{3.25}}$,则 $d_A > d_B$,故 B 正确;对于 C 选项,点 P 与点 $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ 间的距离 $h_A = \sqrt{(5.6 - 5.2)^2 + (8.6 - 9.8)^2} = \sqrt{0.4^2 + 1.2^2}$,点 P 与点 $(\bar{x}_B, \bar{y}_B)$ 间的距离 $h_B = \sqrt{(5.6 - 6)^2 + (8.6 - 9.4)^2} = \sqrt{0.4^2 + 0.8^2}, \therefore h_A > h_B$,故 C 正确;对于 D 选项, $\therefore r =$

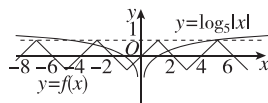
$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \therefore \frac{r}{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{s_x}{s_y}, \therefore \frac{r_A}{b_A} =$$

$$\frac{s_{x_A}}{s_{y_A}}, \text{ 则 } s_{y_A} = \frac{2 \times 0.3}{0.6} = 1, \frac{r_B}{b_B} = \frac{s_{x_B}}{s_{y_B}},$$

$$\text{则 } s_{y_B} = \frac{0.1 \times 1.5}{0.3} = 0.5, \therefore s_{y_A} > s_{y_B},$$

故 D 错误. 故选 BC.

11. BC 【解析】用 x 替换 $2x$,得 $f(x - 1) = f(3 - x)$,所以 $f(x + 2) = f(-x) = -f(x)$,所以 $f(x + 4) = -f(x + 2) = f(x)$,易知函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4,故 A 错误;当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$,所以函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4,所以函数 $f(x)$ 在 $[2024, 2025]$ 上单调递增,故 B 正确;因为 $f(0) = 0, f(1) = 1$,当 $x = 0$ 时, $f(2) = f(0) = 0$,当 $x = 1$ 时, $f(3) = -f(1) = -1$,又 $f(4) = f(0) = 0$,所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$,则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 5[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) = 1$,故 C 正确;当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x$,结合 $f(x)$ 的周期性及其图象的对称性作出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示,作出 $y = \log_5 |x|$ 的图象,由图知两函数图象共有 5 个交点,即方程 $f(x) = \log_5 |x|$ 有 5 个根,故 D 错误. 故选 BC.



12. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $B + C = 60^\circ$,

$$\text{所以 } A = 120^\circ, \text{ 所以 } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\text{由正弦定理可得 } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{a + b - c} =$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

13. $\sqrt{10} - 2\sqrt{2}$ 【解析】设点 $P(x, y)$,则 $\vec{PA} = (1 - x, -y), \vec{PB} = (5 - x, -y)$,由 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} \leq 4$,得 $(x - 1)(x - 5) + y^2 \leq 4$,即 $(x - 3)^2 + y^2 \leq 8$,则点 P 在以点 $C(3, 0)$ 为圆心, $2\sqrt{2}$ 为半径的圆上及其内部. 点 $C(3, 0)$ 到直线 $3x - y + 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3 \times 3 - 0 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10} >$

$2\sqrt{2}$,所以点 P 到直线 $3x - y + 1 = 0$ 的距离的最小值为 $d - 2\sqrt{2} = \sqrt{10} - 2\sqrt{2}$.

14. 573 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$,因为 a_2, a_5, a_{14} 成等比数列,所以 $a_2 a_{14} = a_5^2$,即 $(5 - d)(5 + 11d) = (5 + 2d)^2$,解得 $d = 2$ 或 $d = 0$ (舍去),所以 $a_n = 5 + 2(n - 3) = 2n - 1$,则 $a_{100} = 199$. 当 $2^n \leq x < 2^{n+1}$ 时, $[\log_2 x] = n$,所以 $[\log_2 (2^n + 1)] = [\log_2 (2^n + 3)] = \dots = [\log_2 (2^{n+1} - 1)] = n$,共有 2^{n-1} 个 n ,因

为 $2^7 < 199 < 2^8$, 所以 $S_{100} = b_1 + b_2 + \dots + b_{100} = [\log_2 1] + [\log_2 3] + \dots + [\log_2 199] = 0 + 2^0 \times 1 + 2^1 \times 2 + 2^2 \times 3 + 2^3 \times 4 + 2^4 \times 5 + 2^5 \times 6 + \frac{199-127}{2} \times 7 = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + 6 \times 2^5 + 36 \times 7$, 令 $T = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + 6 \times 2^5$, 则 $2T = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + 5 \times 2^5 + 6 \times 2^6$, 两式相减得 $-T = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 - 6 \times 2^6$, 则 $T = 5 \times 2^6 + 1$, 所以 $S_{100} = 5 \times 2^6 + 1 + 36 \times 7 = 573$.

小题9 “8+3+3”73分练

1. D 【解析】由题意知 $z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+2i$, 所以 $\bar{z} = 1-2i$, 所以 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第四象限. 故选 D.

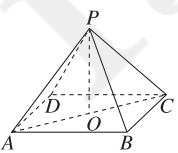
2. B 【解析】 $A = \{x \in \mathbf{Z} | x+1 > 0\} = \{x \in \mathbf{Z} | x > -1\}$, 因为 $A \cap B$ 中有 2 个元素, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$, 所以 $1 \leq a < 2$. 故选 B.

3. A 【解析】 $\sin\left(\frac{5\pi}{4} - x\right) = \sin\left[\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{3}$. 故选 A.

4. D 【解析】将甲、乙捆绑看作一个元素, 由丙不能在第一个与最后一个发言, 知丙的位置有 3 个, 将剩余 4 个元素全排列有 A_4^4 种方法, 故不同的安排方法共有 $3 \times A_2^2 \times A_4^4 = 144$ (种). 故选 D.

5. D 【解析】由 $a(a+1) > 0$, 得 $a > 0$ 或 $a < -1$. 当 $a > 0$ 时, $e = \sqrt{1 + \frac{a+1}{a}} = \sqrt{2 + \frac{1}{a}} > \sqrt{2}$; 当 $a < -1$ 时, 双曲线方程为 $\frac{y^2}{-a-1} - \frac{x^2}{-a} = 1$, $e = \sqrt{1 + \frac{-a}{-a-1}} = \sqrt{2 - \frac{1}{a+1}} > \sqrt{2}$. 综上所述, $e > \sqrt{2}$. 故选 D.

6. A 【解析】如图, 连接 AC, 设 AC 的中点为 O, 连接 OP, 则 $OP \perp$ 平面 ABCD, 因为四棱锥 P-ABCD 的底面是边长为 2 的正方形, 所以 $OA = OC = \sqrt{2}$, 又 $PC = 2$, 所以由勾股定理得 $PO = \sqrt{2}$, 故四棱锥的体积为 $\frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 四棱锥的表面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2^2 = 4\sqrt{3} + 4$. 设内切球的半径为 r, 则由等体积法可得 $\frac{1}{3}(4\sqrt{3} + 4)r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, 解得 $r = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, 所以内切球的表

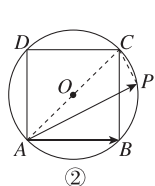
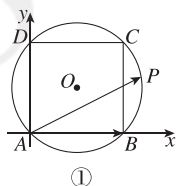


面积 $S = (8 - 4\sqrt{3})\pi$. 故选 A.

7. C 【解析】方法一: 如图①, 以 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$. 设 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (x, y)$. 因为 $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = x$. 由题意知, 圆 O 的半径 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为点 P 在劣弧 BC (包括端点) 上, 所以 $1 \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

方法二: 如图②, 连接 AC, CP. 易知 $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 设 $\angle PAB = \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$,

则 $\angle PAC = \frac{\pi}{4} - \theta$. 由已知可得 $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$, $\angle APC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AC}| \cos \angle PAC = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cos \theta = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta\right) \cos \theta = (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta = \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, 所以 $1 \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, 即 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left[1, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$. 故选 C.



8. D 【解析】 $f(x) = a^x + b^x$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $b > 0$ 且 $b \neq 1$, $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$, 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = a^x (\ln a)^2 + b^x (\ln b)^2 > 0$ 恒成立, 故 $f'(x) = a^x \ln a + b^x \ln b$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 要使 $f(x) = a^x + b^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 只需 $f'(0) = \ln a + \ln b \geq 0$, 即只需 $ab \geq 1$. 对于 A, 令 $h(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 1$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故 $h(x) = x - 1 - \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(1.2) > h(1) = 0$, 即 $0.2 > \ln 1.2$, 则 $ab = 5 \ln 1.2 < 5 \times 0.2 = 1$, A 不符合题意; 对于 B, $ab = 0.2 \ln 15 = \frac{\ln 15}{5} < \frac{\ln 16}{5} <$

$\frac{\ln 16}{4} = \ln 2 < 1$, B 不符合题意; 对于 C, 令 $q(x) = (1-x)e^x$, $x \in (0, 1)$, 则 $q'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x < 0$ 恒成立, 故 $q(x) = (1-x)e^x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 故 $q(0.2) < q(0) = 1$, 即 $ab = 0.8e^{0.2} < 1$, C 不符合题意; 对于 D, 令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减, 故 $\varphi(4) > \varphi(5)$, 即 $\frac{\ln 4}{4} > \frac{\ln 5}{5}$, 因为 $\frac{1.8}{5} = 0.36 > \frac{\ln 2}{2}$, 所以 $\frac{1.8}{5} > \frac{\ln 5}{5}$, 所以 $e^{1.8} > 5$, 所以 $0.2e^{1.8} > 1$, 即 $ab = 0.2e^{1.8} > 1$, D 符合题意. 故选 D.

9. AD 【解析】对于 A, 因为 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $ab > 0$, 所以 $\frac{ab}{a} < \frac{ab}{b}$, 可得 $a > b$, 故 A 选项正确; 对于 B, 取 $a = 1, b = 2$, 此时满足 $|a - 2| > |b - 2|$, 但 $a < b$, 故 B 选项错误; 对于 C, 由 $a^2 b - ab^2 > a - b$ 可得 $a^2 b + b > ab^2 + a$, 则 $b(a^2 + 1) > a(b^2 + 1)$, 因为 $a, b > 0$, 所以 $\frac{a^2 + 1}{a} > \frac{b^2 + 1}{b}$, 即 $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$, 又函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调, 所以不能得到 $a > b$, 故 C 选项错误; 对于 D, 由 $\ln(a^2 + 1) > \ln(b^2 + 1)$ 可知 $a^2 > b^2$, 因为 $a, b > 0$, 所以 $a > b$, 故 D 选项正确. 故选 AD.

10. ACD 【解析】依题意, $f(x) = \sqrt{3} \sin 2\omega x + \cos 2\omega x = 2 \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$, 得 $2\omega \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = 3k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 又 $0 < \omega < 1$, 所以 $\omega = \frac{1}{2}$, 则 $f(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. $f(x)$ 的最小正周期为 2π , A 正确; $y = f\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos 2x$ 是偶函数, B 错误; $y = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x$, 令 $g(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x$, 则 $g\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2 \cos x \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos x = g(x)$, 则 $y = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称, C 正确; $f(tx) =$

$2\sin\left(tx+\frac{\pi}{6}\right), t>0$, 当 $x\in[0,\pi]$ 时,
 $tx+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},t\pi+\frac{\pi}{6}\right]$, 依题意知
 $2\pi\leq t\pi+\frac{\pi}{6}<3\pi$, 解得 $t\in\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$,
 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】对于 A 选项, 可以得到

$$a_n = \begin{cases} 1, n=4k+1, k\in\mathbf{N}, \\ 0, n=4k+2, k\in\mathbf{N}, \\ -1, n=4k+3, k\in\mathbf{N}, \\ 0, n=4k+4, k\in\mathbf{N}, \end{cases} \text{ 故 } S_n = 1$$

或 0. 令 $M=2$, 则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 都有 $|S_n|<M$, A 正确; 对于 B 选项, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n}$, 故 $S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \geq \frac{m}{2} + 1$, 则对任意 $M>0$, 取 $m=[2M]$ ($[2M]$ 是不超过 $2M$ 的最大整数), 存在 $n=2^m$, 使得 $|S_n| \geq \frac{[2M]}{2} + 1 > M$, B 正

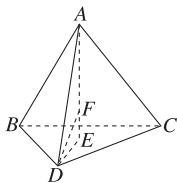
确; 对于 C 选项, 下面证 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$,
 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 令 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$,
 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ 在
 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 因为 $f'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} < 0$, 所以存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得
 $f'(x_0) = 0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$,
 当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 故
 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递
 增, 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 又 $f(0) =$
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 故 $f(x) \geq 0$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上
 恒成立, 即 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
 令 $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, 则有 $\sin \frac{1}{n} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$,
 又由 B 选项可知, 当 $a_n = \frac{1}{n}$ 时, 对任意
 $M>0$, 存在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $|S_n| > M$, 同
 理当 $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$ 时, 对任意 $M>0$, 存
 在 $n\in\mathbf{N}^*$, 使得 $|S_n| > M$, 故当 $a_n =$
 $\sin \frac{1}{n}$ 时, 对任意 $M>0$, 存在 $n\in\mathbf{N}^*$,
 使得 $|S_n| > M$, C 错误; 对于 D 选项, 若
 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 存在 $M_1 > 0$, 使得
 $|S_n| < M_1$, 则 $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq$

$|S_n| + |S_{n-1}| < 2M_1$, 故对任意 $n\in$
 $\mathbf{N}^*$, 存在 $M_2 = 2M_1 > 0$, 使得 $|a_n| <$
 M_2 , D 正确. 故选 ABD.

12. $\frac{2}{5}$ 【解析】设甲获得冠军为事件 A,
 比赛共进行了三局为事件 B, 则
 $P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} +$
 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$, $P(AB) = \frac{2}{3} \times$
 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, 所以
 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{27}}{\frac{20}{27}} = \frac{2}{5}$.

13. $\frac{10}{7}$ 【解析】设线段 AF_2 的中垂线与
 AF_2 相交于点 M, 由椭圆方程 $\frac{x^2}{9} +$
 $\frac{y^2}{5} = 1$ 可知 $a=3, b=\sqrt{5}$, 所以 $c=2$. 连
 接 AF_1 , 由已知得 $|AF_1| = |F_1F_2| =$
 $2c=4$, 又点 A 在椭圆上, 所以根据椭圆
 的定义有 $|AF_1| + |AF_2| = 2a=6$, 所以
 $|AF_2| = 2$, 所以 $|AM| = |MF_2| = 1$. 在
 $\text{Rt} \triangle F_1F_2M$ 中, $\cos \angle F_1F_2M =$
 $\frac{|F_2M|}{|F_1F_2|} = \frac{1}{4}$, 又 $\angle F_1F_2M + \angle F_1F_2B =$
 π , 所以 $\cos \angle F_1F_2B = -\frac{1}{4}$. 连接
 F_1B , 因为点 B 在椭圆上, 所以根据椭
 圆的定义有 $|BF_1| + |BF_2| = 2a=6$, 设
 $|BF_2| = m$, 则 $|BF_1| = 6 - m$,
 $|F_1F_2| = 4$, 在 $\triangle F_1F_2B$ 中, 由余弦定理得
 $\cos \angle F_1F_2B = \frac{|F_1F_2|^2 + |BF_2|^2 - |BF_1|^2}{2|F_1F_2| \cdot |BF_2|} =$
 $\frac{16 + m^2 - (6-m)^2}{8m} = -\frac{1}{4}$, 解得 $m =$
 $\frac{10}{7}$, 即 $|BF_2| = \frac{10}{7}$.

14. $6\sqrt{3}$ 27 【解析】该
 组合体一共有 24 个
 面, 每一个面都是全
 等的边长为 1 的等边
 三角形, 则其表面积
 为 $24 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times$



$\sin \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$. 该组合体的外接球也是
 任意一个正四面体的外接球, 用一个正
 四面体来研究. 如图, 在正四面体 AB-
 CD 中, E 是 $\triangle BCD$ 的中心, F 是外接
 球的球心, 连接 AE, DE, DF, 则 F 在
 AE 上, $2DE \cos \frac{\pi}{6} = DC$, 可得 $DE =$
 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 则 $AE = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
 设外接球的半径为 R, 则 $AF = DF = R$,
 又 $AF + EF = AE, DF^2 = EF^2 + DE^2$,
 所以 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 两正四面体公共部分一

共有 8 个面, 且每一个面都是全等的边
 长为 1 的等边三角形, 则其表面积为
 $8 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$, 大正四面
 体的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} \times$
 $\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则每个小正四面体的体积
 为 $\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}$, 则公共部分的体
 积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 设其内切球的
 半径为 r, 则公共部分的体积也可表示
 为 $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3}r = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 解得 $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 故所求
 比值为 $\left(\frac{R}{r}\right)^3 = 27$.

小题 10 “8+3+3”73 分练

- D 【解析】根据全称量词命题的否定是
 存在量词命题可知, 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, e^x -$
 $x - 1 \geq 0$ ”的否定是“ $\exists x \in \mathbf{R}, e^x - x -$
 $1 < 0$ ”. 故选 D.
- A 【解析】由题意可得 $\begin{cases} 2m \times 2 - 3 > 0, \\ 2m \times 1 - 3 \leq 0, \end{cases}$
 解得 $\frac{3}{4} < m \leq \frac{3}{2}$. 故选 A.
- C 【解析】根据频率分布条形图可知
 $n_1=4, n_2=5$, 即 $n_1 < n_2$; 显然 A 部门的
 得分更集中, 其方差更小, 即 $s_1^2 < s_2^2$. 故
 选 C.
- C 【解析】对于 A, 由 $\alpha // \beta, l \perp \alpha$ 可得
 $l \perp \beta$, 又 $m \perp \beta$, 所以 $l // m$, 即“ $l // m$ ”是
 “ $\alpha // \beta$ ”的必要条件, 故 A 错误; 对于 B, 由
 $m \perp \beta, l \perp m$ 可得 $l \subset \beta$ 或 $l // \beta$, 当 $l \subset \beta$
 时, 由 $l \perp \alpha$, 可得 $\alpha \perp \beta$, 当 $l // \beta$ 时, 经过 l
 和平面 β 内一点可确定平面 γ , 设 $\gamma \cap$
 $\beta = l'$, 则 $l // l'$, 由 $l \perp \alpha$ 可得 $l' \perp \alpha$, 同理
 可得 $\alpha \perp \beta$, 即“ $l \perp m$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的充分条
 件, 故 B 错误; 对于 C, 假设 α, β 没有公共
 点, 则 $\alpha // \beta$, 又由 $l \perp \alpha, m \perp \beta$ 可得 $l // m$,
 这与 l, m 异面矛盾, 故假设不成立, 故 C
 正确; 对于 D, 由 α, β 有公共点, 可得 α, β
 相交, 又 $l \perp \alpha, m \perp \beta$, 所以 l, m 相交或异
 面, 故 D 错误. 故选 C.
- D 【解析】由题意可得 $a_{n+1} - a_n = a_1 +$
 $2n$, 则可得 $a_2 - a_1 = a_1 + 2, a_3 - a_2 =$
 $a_1 + 4, \dots, a_{10} - a_9 = a_1 + 18$, 将以上各式
 相加, 得 $a_{10} - a_1 = 9a_1 + \frac{9 \times (2+18)}{2} =$
 $9a_1 + 90$, 即 $a_{10} = 10a_1 + 90$, 又 $a_{10} = 130$,
 所以 $a_1 = 4$. 故选 D.
- D 【解析】根据题意, 设小球半径为 R,
 因为小球与四棱台的每个面都相切, 所
 以四棱台的体积等于以球心为顶点, 以
 四棱台的上、下底面和四个侧面为底面
 的六个四棱锥的体积之和, 这六个四棱
 锥的高都是球的半径 R, 该四棱台的高
 是 2R, 则该四棱台的体积 $V = \frac{R}{3}(S_1 +$
 $S_2 + S) = \frac{2R}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, 变形

可得 $S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$, 则有 $\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$. 故选 D.

7. C 【解析】因为 $\omega>0$, 且 $x\in[0,2\pi]$, 所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}\right]$, 由题意可得 $4\pi\leq 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<5\pi$, 解得 $\frac{23}{12}\leq\omega<\frac{29}{12}$, 又因为直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴, 所以 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\omega=6k+2, k\in\mathbf{Z}$, 所以 $k=0, \omega=2$, 则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

8. C 【解析】设直线 $y=x$ 与函数 $y=\ln(x+a)+b$ 的图象相切于点 $Q(x_0, y_0)$, 则 $\begin{cases} y_0=x_0, \\ y_0=\ln(x_0+a)+b, \end{cases}$ 所以 $\ln(x_0+a)+b=x_0$, 又 $[\ln(x+a)+b]'=\frac{1}{x+a}$, 所以 $\frac{1}{x_0+a}=1$, 即 $x_0+a=1$, 所以 $\ln 1+b=x_0$, 即 $b=x_0$, 所以 $a+b=1$, 所以 $e^a+b=e^a-a+1$. 令 $f(x)=e^x-x+1$, 则 $f'(x)=e^x-1$. 当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减; 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 所以当 $x=0$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(0)=2$, 所以 e^a+b 的最小值为 2. 故选 C.

9. BC 【解析】对于 A, 取 $a=(1,1), b=(-1,-1)$, 满足 $a\gg b$, 取 $\mu=-1, \lambda=2$, 则 $-a=(-1,-1), 2b=(-2,-2)$, 满足 $\mu a\gg\lambda b$, 但 $\mu<\lambda$, A 错误; 对于 B, 因为 $2022<2023, 2024\leq 2025$, 所以 $a\ll b$, B 正确; 对于 C, 设向量 $a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2), c=(x_0, y_0)$, 由 $a\gg b$, 得 $x_1\geq x_2$ 且 $y_1>y_2$, 则 $x_1+x_0\geq x_2+x_0$ 且 $y_1+y_0>y_2+y_0$, 所以 $(a+c)\gg(b+c)$, C 正确; 对于 D, 根据 $a\ll b$, 取向量 $a=(-2, -2), b=(-1, -1), c=(-1, -1)$, 则 $a\cdot c=4, b\cdot c=2$, 则 $a\cdot c>b\cdot c$, D 错误. 故选 BC.

10. AC 【解析】对于

$$A, S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 1\times$$

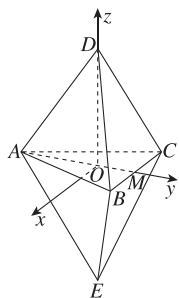
$$1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 所以该}$$

几何体的表面积为

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 故 A}$$

正确. 对于 B, 如图

所示, 设点 D 在平面 ABC 内的射影为 O, 连接 DO, AO, 延长 AO 交 BC 于 M,



则 M 为 BC 的中点, $AO=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 又因为 $AD=1$, 所以正三棱锥 D-ABC 的高为 $DO=\sqrt{AD^2-AO^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以该几何体的体积为 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{6}$, 故 B 错误. 对于 C, 由 B 选项可知 $DO\perp$ 平面 ABC, 由对称性可知 D, O, E 三点共线, 连接 DE, 则 $DE\perp$ 平面 ABC, 又 $DE\subset$ 平面 ADE, 所以平面 ADE $\perp$ 平面 ABC, 故 C 正确. 对于 D, 以 O 为坐标原点, OM, OD 所在直线分别为 y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 因为 $AO=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $OM=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$, 则 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right), E\left(0, 0, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 所以 $\overrightarrow{BC}=(-1, 0, 0), \overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 设平面 BCE 的法向量为 $n=(x, y, z)$, 则有 $\begin{cases} -x=0, \\ -\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{3}z=0, \end{cases}$ 取 $z=1$, 可得 $y=-2\sqrt{2}, x=0$, 所以 $n=(0, -2\sqrt{2}, 1)$. 因为 $A\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), D\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 所以 $\overrightarrow{AD}=\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 又 $\overrightarrow{AD}\cdot n=-\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}\neq 0$, 所以直线 AD 与平面 BCE 不平行, 故 D 错误. 故选 AC.

11. ACD 【解析】对于 A 选项, X_1 的可能取值为 5, 7, 且 $P(X_1=7)=P(X_1=5)=\frac{1}{2}$, 故 $E(X_1)=5\times\frac{1}{2}+7\times\frac{1}{2}=6$, A 正确. 对于 B 选项, $X_2=12$, 即 2 次旋转中, 1 次按顺时针方向旋转, 1 次按逆时针方向旋转, 故 $P(X_2=12)=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, B 错误. 对于 C 选项, $X_7=7$, 即 7 次旋转后, 顺时针走了 210° 或逆时针走了 150° , 设硬币正面朝上的次数为 x , 则反面朝上的次数为 $7-x$, 由 $150^\circ(7-x)-150^\circ x=150^\circ$, 解得 $x=3$, 故 $P(X_7=7)=C_7^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$, C 正确. 对于 D 选项, 若硬币 8 次均正面朝上, 此时 $X_8=4$, 故 $P(X_8=4)=C_8^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$, 若硬币 7 次正面朝上, 1 次反面朝上, 此时

$X_8=6$, 故 $P(X_8=6)=C_8^7\times\left(\frac{1}{2}\right)^7\times\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{32}$, 若硬币 6 次正面朝上, 2 次反面朝上, 此时 $X_8=8$, 故 $P(X_8=8)=C_8^6\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{64}$, 若硬币 5 次正面朝上, 3 次反面朝上, 此时 $X_8=10$, 故 $P(X_8=10)=C_8^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}$, 若硬币 4 次正面朝上, 4 次反面朝上, 此时 $X_8=12$, 故 $P(X_8=12)=C_8^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{35}{128}$, 若硬币 3 次正面朝上, 5 次反面朝上, 此时 $X_8=2$, 故 $P(X_8=2)=C_8^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{32}$, 若硬币 2 次正面朝上, 6 次反面朝上, 此时 $X_8=4$, 故 $P(X_8=4)=C_8^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{64}$, 若硬币 1 次正面朝上, 7 次反面朝上, 此时 $X_8=6$, 故 $P(X_8=6)=C_8^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{32}$, 若硬币 8 次均反面朝上, 此时 $X_8=8$, 故 $P(X_8=8)=C_8^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{256}$, 故 $E(X_8)=4\times\frac{1}{256}+6\times\frac{1}{32}+8\times\frac{7}{64}+10\times\frac{7}{32}+12\times\frac{35}{128}+2\times\frac{7}{32}+4\times\frac{7}{64}+6\times\frac{1}{32}+8\times\frac{1}{256}=\frac{489}{64}>6$, D 正确. 故选 ACD.

12. $1-\sqrt{3}i$ 【解析】设 $z=a+bi, a, b\in\mathbf{R}$, 则 $\bar{z}=a-bi$, 因为 $z\cdot\bar{z}=2(z+\bar{z})=4$, 所以 $\begin{cases} z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=4, \\ 2(z+\bar{z})=4a=4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=\sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1, \\ b=-\sqrt{3} \end{cases}$, 又因为 z 在复平面内对应的点不在第一象限, 所以 $b\leq 0$, 可知 $\begin{cases} a=1, \\ b=-\sqrt{3} \end{cases}$, 所以 $z=1-\sqrt{3}i$.
13. $\frac{1}{3}-\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{8}=1$ 【解析】因为 $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}$, F, A, B 三点共线, 所以 $m+\frac{2}{3}=1$, 即 $m=\frac{1}{3}$, 所以 $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$, 即 $\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$, 可得 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{FB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, 于是 $\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$, 即 $a+c=2(a-c)$, 则 $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$, 即 $e=\frac{1}{3}$. 因为 $P\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ 为椭圆 C 上一点, 所以 $\frac{1}{a^2}+$

$$\frac{64}{b^2} = 1, \text{ 即 } \frac{1}{a^2} + \frac{64}{9b^2} = 1, \text{ 由 } \frac{c}{a} = \frac{1}{3}, \text{ 得 } a^2 = 9c^2, \text{ 所以 } b^2 = 8c^2, \text{ 所以 } \frac{1}{9c^2} + \frac{64}{9 \times 8c^2} = 1, \text{ 解得 } c^2 = 1, \text{ 则 } \begin{cases} a^2 = 9, \\ b^2 = 8, \end{cases} \text{ 故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{8} = 1.$$

14. $\frac{2}{3}$ 【解析】由 $c + 2\sqrt{3}\cos C = 2b$ 可得 $c + 2\sqrt{3} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \times \sqrt{3}b} = 2b$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$, 则 $A = \frac{\pi}{3}$. 连接 OB, OC , 由正弦定理可得圆 O 的半径为 $\frac{1}{2} \times \frac{a}{\sin A} = 1$, 即 $|\vec{AO}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1$. 根据余弦定理可知 $\cos \angle BOC = \frac{|\vec{OB}|^2 + |\vec{OC}|^2 - a^2}{2|\vec{OB}||\vec{OC}|} = \frac{1+1-3}{2} = -\frac{1}{2}$, 则 $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$, 又 $\vec{AO} = m\vec{AB} + n\vec{AC} = m(\vec{OB} - \vec{OA}) + n(\vec{OC} - \vec{OA}) = m\vec{OB} + n\vec{OC} + (m+n)\vec{AO}$, 所以 $(1-m-n)\vec{AO} = m\vec{OB} + n\vec{OC}$, 所以 $(1-m-n)^2|\vec{AO}|^2 = m^2|\vec{OB}|^2 + n^2|\vec{OC}|^2 + 2mn|\vec{OB}||\vec{OC}|\cos \angle BOC$, 所以 $(1-m-n)^2 = m^2 + n^2 - mn$, 整理可得 $3mn = 2m + 2n - 1$, 又 $mn \leq \left(\frac{m+n}{2}\right)^2$, 所以 $2(m+n) - 1 \leq \frac{3}{4}(m+n)^2$, 解得 $m+n \leq \frac{2}{3}$ 或 $m+n \geq 2$. 当 $m+n \geq 2$ 时, 点 O 在 $\triangle ABC$ 外部, 且 $\angle BOC + A = \pi$, 所以 B, O, C, A 四点共圆, 不满足题意, 舍去, 所以 $m+n \leq \frac{2}{3}$ (当且仅当 $m=n=\frac{1}{3}$ 时取等号), 故 $m+n$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$.

小题 11 “8+3+3”73 分练

1. C 【解析】由题意, 当 $x=1$ 时, $z=x^y=1$, 当 $x=2, y=2$ 时, $z=x^y=4$, 当 $x=2, y=4$ 时, $z=x^y=16$, 故 C 中有 3 个元素, 故选 C.
2. B 【解析】由题意得参考的总人数为 $500+800+700=2000$, 故三所学校高三年级参考学生数学成绩的总样本平均数为 $\frac{500}{2000} \times 92 + \frac{800}{2000} \times 105 + \frac{700}{2000} \times 100 = 100$, 故选 B.
3. C 【解析】由 $a_1=2, a_2=1, a_{n+1}=a_n - a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 得 $a_3=a_2-a_1=-1, a_4=a_3-a_2=-2, a_5=a_4-a_3=-1, a_6=a_5-a_4=1, a_7=a_6-a_5=2, a_8=a_7-a_6=1, \dots$, 则 $\{a_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列, 所以 $a_{2024}=a_{337 \times 6 + 2} =$

$a_2=1$. 故选 C.

4. D 【解析】由 $a=(1,2)$, 得 $|a|=\sqrt{5}$. 由 $(b-2a) \perp a$, 得 $(b-2a) \cdot a=0$, 则 $a \cdot b=2a^2=10$. 由 $|b-2a|=4$, 得 $(b-2a)^2=16$, 即 $b^2+4a^2-4a \cdot b=16$, 即 $b^2+4 \times 5 - 4 \times 10 = 16$, 所以 $|b|=6$. 故选 D.

5. A 【解析】因为点 M 到点 A, B 的距离相等, 所以动点 M 的轨迹是线段 AB 的中垂面与平面 α 的交线. 如图所示, 取 AB 的中点 C , 连接 CM , 可得 $CM \perp AB$, 则 $AM = \frac{AC}{\cos \angle MAC}$. 因为直线 AB 与平面 α 所成的角为 45° , 所以 $\angle MAC$ 的最小值为 45° , 故 $\cos \angle MAC$ 的最大值为 $\cos 45^\circ$, 所以线段 AM 的长度的最小值为 $\frac{AC}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$. 故选 A.

6. D 【解析】 $a = \log_2 3 = \log_2 \left(2 \times \frac{3}{2}\right) = 1 + \log_2 \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 2}$, $b = \log_3 12 = \log_3 \left(8 \times \frac{3}{2}\right) = 1 + \log_3 \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 8}$, $c = \lg 15 = \lg \left(10 \times \frac{3}{2}\right) = 1 + \lg \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{\log_{\frac{3}{2}} 10}$, $\because 0 < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} 8 < \log_{\frac{3}{2}} 10$, $\therefore a > b > c$. 故选 D.

7. D 【解析】设 $P(x, y)$, $\therefore \vec{PA} \cdot \vec{PB} = 3a^2$, $\therefore (x+a)(x-a) + y^2 = 3a^2$, 即 $x^2 + y^2 = 4a^2$, $\therefore$ 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4a^2$ 上, 该圆的圆心为 $(0, 0)$, 半径 $r_1 = 2a$. 又点 P 在圆 $(x-a+1)^2 + (y-a-2)^2 = a^2$ 上, 该圆的圆心为 $(a-1, a+2)$, 半径 $r_2 = a$, 故两圆有公共点, 可得 $|r_2 - r_1| \leq \sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2} \leq r_1 + r_2$, 整理可得 $\begin{cases} a^2 + 2a + 5 \geq 0, \\ 7a^2 - 2a - 5 \geq 0, \end{cases}$ 又 $a > 0$, 所以 $a \geq 1$. 故选 D.

8. A 【解析】由 $c^2 - a^2 = ab$, 得 $c^2 = a^2 + ab$. 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 所以 $a^2 + ab = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 所以 $a = b - 2a \cos C$. 由正弦定理得 $\sin A = \sin B - 2 \sin A \cos C$, 即 $\sin A = \sin(A+C) - 2 \sin A \cos C$, 即 $\sin A = \sin C \cos A - \cos C \sin A = \sin(C-A)$, 所以 $A = C - A$ 或 $A + C - A = \pi$ (舍去), 故 $C = 2A$. 因为 $C = 2A$, 所以 $B = \pi - 3A$. 由正弦定理得 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\frac{2}{\sin 2A} = \frac{b}{\sin(\pi - 3A)} = \frac{b}{\sin 3A}$, 可得 $b = \frac{2 \sin(A+2A)}{\sin 2A} = \frac{2 \sin A(1 - 2 \sin^2 A) + 2 \cos A \cdot 2 \sin A \cos A}{2 \sin A \cos A} =$

$$\frac{1 - 2 \sin^2 A + 2 \cos^2 A}{\cos A} = \frac{3 - 4 \sin^2 A}{\cos A}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{3 \sin A - 4 \sin^3 A}{\cos A} = 3 \tan A - 4 \tan A \sin^2 A = 3 \tan A - \frac{4 \tan A \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = 3 \tan A - \frac{4 \tan^3 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 + \tan^2 A}. \text{ 因为 } \pi - 3A > 0, \text{ 所以 } A < \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } 0 < \tan A < \sqrt{3}. \text{ 设 } f(x) = \frac{3x - x^3}{1 + x^2}, x \in (0, \sqrt{3}), \text{ 则 } f'(x) = \frac{(3 - 3x^2)(1 + x^2) - (3x - x^3) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-x^4 - 6x^2 + 3}{(1 + x^2)^2}. \text{ 令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } x^4 + 6x^2 - 3 < 0, \text{ 可得 } 0 < x^2 < \frac{-6 + \sqrt{36 + 12}}{2} = 2\sqrt{3} - 3 < 3, \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 可得 } 2\sqrt{3} - 3 < x^2 < 3, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (0, \sqrt{2\sqrt{3} - 3}) \text{ 上单调递增, 在 } (\sqrt{2\sqrt{3} - 3}, \sqrt{3}) \text{ 上单调递减, 所以当 } x = \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \text{ 时, } f(x) \text{ 有最大值, 即当 } \tan A = 2\sqrt{3} - 3 \text{ 时, } \triangle ABC \text{ 的面积最大, 此时 } \cos C = \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - (2\sqrt{3} - 3)}{1 + (2\sqrt{3} - 3)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}. \text{ 故选 A.}$$

9. AD 【解析】对于 A, 4 个北方城市的环比数据的极差为 $99.7 - 99.5 = 0.2$, 4 个南方城市的环比数据的极差为 $99.6 - 99.3 = 0.3$, 所以 4 个北方城市的环比数据的极差小于 4 个南方城市的环比数据的极差, 故 A 正确; 对于 B, 4 个北方城市的环比数据的均值为 $\frac{99.5 + 99.6 + 99.6 + 99.7}{4} = 99.6$, 4 个南方城市的环比数据的均值为 $\frac{99.5 + 99.3 + 99.6 + 99.6}{4} = 99.5$, 所以 4 个北方城市的环比数据的均值大于 4 个南方城市的环比数据的均值, 故 B 错误; 对于 C, 4 个北方城市的环比数据的方差为 $\frac{1}{4} \times [(99.5 - 99.6)^2 + (99.6 - 99.6)^2 + (99.6 - 99.6)^2 + (99.7 - 99.6)^2] = 0.005$, 4 个南方城市的环比数据的方差为 $\frac{1}{4} \times [(99.5 - 99.5)^2 + (99.3 - 99.5)^2 + (99.6 - 99.5)^2 + (99.6 - 99.5)^2] = 0.015$, 所以 4 个北方城市的环比数据的方差小于 4 个南方城市的环比数据的方差, 故 C 错误; 对于 D, 4 个北方城市的环比数据的中位数为 $\frac{99.6 + 99.6}{2} = 99.6$, 4 个南方城市的环比数据的中位数为 $\frac{99.5 + 99.6}{2} = 99.55$, 所以 4 个北方城市的环比数据的中位数大于 4 个南方城市的环比数据的中位数,

故 D 正确. 故选 AD.

10. ACD 【解析】因为抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 在直线 $l: x + y - 1 = 0$ 上, 所以 $\frac{p}{2} + 0 - 1 = 0$, 解得 $p = 2$, A 选项正确. 设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 将抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的方程与直线 $l: x + y - 1 = 0$ 的方程联立, 得 $y^2 = 4(1 - y)$, 即 $y^2 + 4y - 4 = 0$, 由根与系数的关系得 $y_1 + y_2 = -4$, $y_1 y_2 = -4$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = \frac{16}{16} - 4 = -3$, B 选项错误. 因为直线 AB 的斜率为 -1 , 所以 $|AB| = \sqrt{2} |y_1 - y_2| = \sqrt{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{2} \times \sqrt{16 + 16} = 8$, C 选项正确. 设点 D 的坐标为 $(4t^2, 4t)$, 点 D 到直线 AB 的距离为 d , 则 $\triangle ABD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d = 4d$, 所以当 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$ 时, $d = \sqrt{2}$. 直线 AB 的方程是 $x + y - 1 = 0$, 由点到直线的距离公式知, 点 D 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|4t^2 + 4t - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|4t^2 + 4t - 1|}{\sqrt{2}}$, 令 $d = \sqrt{2}$, 得 $|4t^2 + 4t - 1| = 2$, 即 $(4t^2 + 4t - 1)^2 - 4 = 0$. 由 $(4t^2 + 4t - 1)^2 - 4 = (4t^2 + 4t - 3)(4t^2 + 4t + 1) = (2t + 1)^2 [(2t + 1)^2 - 4] = (2t + 1)^2 (2t - 1)(2t + 3) = 16 \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \left(t + \frac{3}{2}\right) = 0$, 解得 $t = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$, 所以有且仅有 3 个点 D, 使得 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$, D 选项正确. 故选 ACD.
11. BCD 【解析】由 $f(x-1) + f(x+1) = f(-2)$, 得 $f(x+1) + f(x+3) = f(-2)$, 则 $f(x-1) = f(x+3)$, 即 $f(x) = f(x+4)$, 故 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数, C 正确; 令 $x = -1$, 得 $f(-2) + f(0) = f(-2)$, 则 $f(0) = 0$, 故 $f(2024) = f(0) = 0$, A 错误; 由 $f(2x+6) = f(-2x)$, 得 $f(x+6) = f(-x)$, 则 $f(-x) = f(x+6) = f[(x-12) + 6] = f(x-6)$, 可得 $f(-3-x) = f(-3+x)$, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -3$ 对称, B 正确; 由 $f(x+6) = f(-x)$, 得 $f(x+3) = f(3-x)$, 故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 3$ 对称, 所以直线 $x = -3 + 4n (n \in \mathbf{Z})$ 及 $x = 3 + 4n (n \in \mathbf{Z})$ 均为 $f(x)$ 的图象的对称轴, 所以 $f(-2) = f(0) = 0$, $f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, 在 $f(x-1) +$

$f(x+1) = f(-2) = 0$ 中, 令 $x = \frac{3}{2}$, 得 $f\left(\frac{3}{2} - 1\right) + f\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 0$, 即 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{9}{2}\right) = -1$, 故 $\sum_{k=1}^{2025} (-1)^k k f\left(k - \frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) - 3f\left(\frac{5}{2}\right) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) - \dots - 2025f\left(\frac{4049}{2}\right) = (1 - 2 - 3 + 4) + \dots + (2021 - 2022 - 2023 + 2024) + 2025 = 2025$, D 正确. 故选 BCD.

12. $\frac{3}{2}$ 【解析】因为 $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $(1 - 3i) \cdot z = |3 + 4i|$, 所以 $z = \frac{5}{1 - 3i} = \frac{5(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 所以复数 z 的虚部为 $\frac{3}{2}$.

13. $\frac{2}{3} - 1$ 【解析】设圆锥 MM' 的底面半径为 r , 球 O 的半径为 R , 因为圆锥 MM' 的轴截面为正三角形, 所以圆锥 MM' 的高 $h = \sqrt{3}r$, 母线长 $l = 2r$. 由题可知 $h = 2R$, 所以球 O 的半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, 所以圆锥 MM' 的体积 $V_1 = \frac{1}{3} \times (\pi \times r^2) \times \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3$, 球 O 的体积 $V_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi r^3$, 所以 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} \pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{2} \pi r^3} = \frac{2}{3}$. 圆锥 MM' 的表面积 $S_1 = \pi r l + \pi r^2 = 3\pi r^2$, 球 O 的表面积 $S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = 3\pi r^2$, 所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi r^2}{3\pi r^2} = 1$.

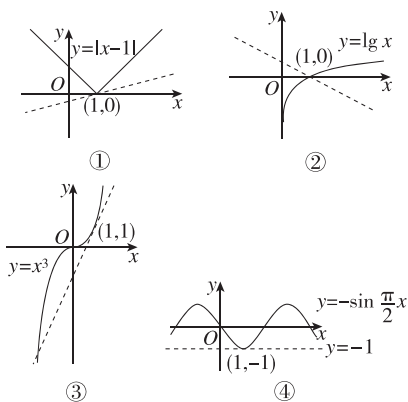
14. $\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $a > 0$, 所以 $y = ax + b$ 在 $[t, t+1] (t > 0)$ 上单调递增, 又 $y = \log_2 x$ 在 $[t, t+1] (t > 0)$ 上单调递增, 所以 $y = \log_2 x + ax + b$ 在 $[t, t+1] (t > 0)$ 上单调递增. 因为 $f(x) = |\log_2 x + ax + b|$ 在区间 $[t, t+1] (t > 0)$ 上的最大值为 $M_t(a, b)$, 所以 $M_t(a, b) = f(t)$ 或 $M_t(a, b) = f(t+1)$. 由题意可知 $f(t) \geq \frac{a}{2} + 1$ 或 $f(t+1) \geq \frac{a}{2} + 1$, 则只需 $-(\log_2 t + at + b) \geq \frac{a}{2} + 1$ 或 $\log_2(t+1) + a(t+1) + b \geq \frac{a}{2} + 1$, 整理得 $b \leq -\log_2 t - at - \frac{a}{2} - 1$ 或 $b \geq$

$-\log_2(t+1) - at - \frac{a}{2} + 1$, 即关于 b 的不等式 $b \leq -\log_2 t - at - \frac{a}{2} - 1$ 或 $b \geq -\log_2(t+1) - at - \frac{a}{2} + 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 可知 $-\log_2(t+1) - at - \frac{a}{2} + 1 \leq -\log_2 t - at - \frac{a}{2} - 1$, 整理得 $\log_2(t+1) - \log_2 t = \log_2\left(1 + \frac{1}{t}\right) \geq 2$, 则 $1 + \frac{1}{t} \geq 4$, 又因为 $t > 0$, 所以 $0 < t \leq \frac{1}{3}$, 所以 t 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

小题 12 “8+3+3”73 分练

1. A 【解析】由 $3^x < 9$ 解得 $x < 2$, 所以 $A = (1, 2)$, $B = (-\infty, 2)$, 所以 $A \subseteq B$, $A \cup B = B$. 故选 A.
2. B 【解析】以点 A 为坐标原点建立平面直角坐标系, 如图所示, 由 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$ 可得 P 为 BC 的中点, 所以 $P(2, 1)$, 易知 $A(0, 0)$, $D(0, 2)$, $B(2, 0)$, 可得 $\overrightarrow{AP} = (2, 1)$, $\overrightarrow{BD} = (-2, 2)$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 2 \times (-2) + 1 \times 2 = -2$. 故选 B.
3. A 【解析】如图, 从 8 个顶点中任取 3 个连接构成三角形包含的样本点有 $C_8^3 = 56$ (个), 其中能构成正三角形包含的样本点有 $\triangle ACD_1$, $\triangle BDC_1$, $\triangle ACB_1$, $\triangle BDA_1$, $\triangle A_1C_1B$, $\triangle B_1D_1A$, $\triangle B_1D_1C$, $\triangle A_1C_1D$, 共 8 个, 故所求概率为 $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$, 故选 A.
4. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q > 0$, 因为 $-a_3, a_2, a_4$ 成等差数列, 所以 $2a_2 = -a_3 + a_4$, 所以 $2q = -q^2 + q^3$, 解得 $q = 2$ (负值舍去), 所以 $S_{2024} = \frac{a_1(1 - q^{2024})}{1 - q} = 2^{2024} - 1$, $a_{2024} = a_1 q^{2023} = 2^{2023}$, 则 $S_{2024} = 2a_{2024} - 1$. 故选 A.
5. C 【解析】梯形 ABCD 旋转一周形成圆台, 且圆台的上底面半径 $r_1 = 1$, 下底面半径 $r_2 = 3$, 由圆 O 和梯形 ABCD 相切可得, $AD = r_1 + r_2 = 1 + 3 = 4$, 所以圆台的高 $h = \sqrt{AD^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{3}$. 圆 O 旋转一周形成球, 则球的半径 $r = \frac{h}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 所以圆台的体积 $V_1 = \frac{\pi}{3} h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2) = \frac{26\sqrt{3}\pi}{3}$, 球的体积 $V_2 = \frac{4\pi}{3} r^3 = 4\sqrt{3}\pi$, 所以 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{13}{6}$. 故选 C.
6. D 【解析】根据题意, 若函数 $f(x)$ 具有性质 P_1 , 则 $f(x)$ 的图象在过点 $(1, f(1))$ 的直线的上方, 且这样的直线只有一条.

对于 A, $f(x)=|x-1|$ 的图象, 以及过点 $(1,0)$ 的直线, 如图①所示, 数形结合可知, 过点 $(1,0)$ 的直线有无数条都满足题意, 故 A 错误; 对于 B, $f(x)=\lg x$ 的图象, 以及过点 $(1,0)$ 的直线, 如图②所示, 数形结合可知, 不存在过点 $(1,0)$ 的直线, 使得 $f(x)$ 的图象在该直线的上方, 故 B 错误; 对于 C, $f(x)=x^3$ 的图象, 以及过点 $(1,1)$ 的直线, 如图③所示, 数形结合可知, 不存在过点 $(1,1)$ 的直线, 使得 $f(x)$ 的图象在该直线的上方, 故 C 错误; 对于 D, $f(x)=-\sin \frac{\pi}{2}x$ 的图象, 以及过点 $(1,-1)$ 的直线, 如图④所示, 数形结合可知, 存在唯一的一条过点 $(1,-1)$ 的直线 $y=-1$, 即 $k=0$, 满足题意, 故 D 正确. 故选 D.



7. C 【解析】如图, 由题意知, 双曲线的一条渐近线方程为 $y=-\frac{b}{a}x$,

$$\begin{cases} y=-\frac{b}{a}x, \\ x^2+y^2=a^2, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x^2=\frac{a^4}{c^2}, \\ y^2=\frac{a^2b^2}{c^2}, \end{cases} \text{所以 } P\left(-\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right), \text{由}$$

三角函数的定义知 $\sin \angle POF = \frac{b}{c}$,

$\cos \angle POF = -\frac{a}{c}$, 又 $\tan \angle FPO = \sqrt{2}$, 且

显然 $\angle FPO$ 为锐角, $\sin^2 \angle FPO + \cos^2 \angle FPO = 1$, 所以 $\cos \angle FPO = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\sin \angle FPO = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 则 $\sin \angle PFO =$

$\sin(\angle OPF + \angle POF) = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{a}{c}\right) +$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}b - \sqrt{6}a}{3c}$. 在 $\triangle POF$ 中, 由正

弦定理可得 $\frac{|OP|}{\sin \angle PFO} = \frac{|OF|}{\sin \angle OPF}$, 即

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}b - \sqrt{6}a}{3c}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{6}}{3}}, \text{化简得 } \frac{b}{a} = 2\sqrt{2}, \text{所以}$$

C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 3$. 故选 C.

8. C 【解析】因为 $f(x) = e^{kx} + 1$, 所以 $kf(x) = k(e^{kx} + 1)$, 由 $kf(x) \geq g(x)$ 得 $k(e^{kx} + 1) \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x (x > 0)$, 即 $kx(e^{kx} + 1) \geq (1+x) \ln x (x > 0)$, 即 $\ln e^{kx} \cdot (e^{kx} + 1) \geq (1+x) \ln x (x > 0)$, 构造函数 $h(x) = (1+x) \ln x (x > 0)$, 则 $\ln e^{kx} \cdot (e^{kx} + 1) \geq (1+x) \ln x (x > 0)$ 可化为 $h(e^{kx}) \geq h(x) (x > 0)$, $h'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$, 令 $t(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$, 则 $t'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} (x > 0)$, 令 $t'(x) = 0$, 解得 $x=1$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $t'(x) < 0$, $t(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t'(x) > 0$, $t(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x=1$ 时, $t(x)$ 取得最小值, 即 $t(x)_{\min} = t(1) = 2 > 0$, 所以 $t(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $h(e^{kx}) \geq h(x) (x > 0)$, 所以 $e^{kx} \geq x (x > 0)$, 即 $kx \geq \ln x (x > 0)$, 所以 $k \geq \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 令 $m(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 则 $m'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$, 令 $m'(x) = 0$, 即 $1 - \ln x = 0$, 解得 $x = e$, 所以当 $x \in (0, e)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x = e$ 时, $m(x)$ 取得最大值, 即 $m(x)_{\max} = m(e) = \frac{1}{e}$, 所以 $m(x) \leq \frac{1}{e}$, 所以 $k \geq \frac{1}{e}$. 故选 C.

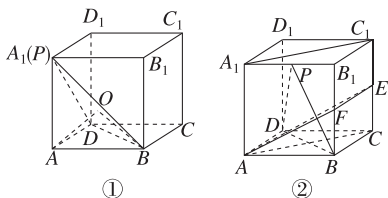
9. ACD 【解析】对于 A, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, 则 $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, 所以 $|\bar{z}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$, 故 A 正确; 对于 B, $z \cdot \bar{z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2 = 1$, $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 所以 $z \cdot \bar{z} \neq z^2$, 故 B 错误; 对于 C, $z^3 = z^2 \cdot z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = i$, 故 C 正确; 对于 D, $z^{2024} = z^2 \cdot z^{2022} = z^2 \cdot (z^3)^{674} = z^2 \cdot i^{674} = z^2 \cdot (i^2)^{337} = -z^2$, 所以 $z^2 + z^{2024} = 0$, 故 D 正确. 故选 ACD.

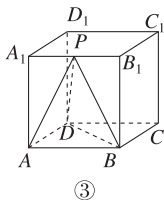
10. ABD 【解析】如图①, 当 $\lambda = 0$ 时, P 与 A_1 重合, 则三棱锥 $A-PBD$ 为正三棱锥, $BD = 3\sqrt{2}$, 设 A 在平面 PBD 内

的射影为 O , 则 O 为 $\triangle PBD$ 的中心, 连接

$$OA, OB, \text{则 } OB = \frac{2}{3} \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$\sqrt{6}$, 所以 $AO = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$, 即当 $\lambda = 0$ 时, 点 A 到平面 PBD 的距离为 $\sqrt{3}$, 故 A 正确; 如图②, 连接 AC, A_1C_1 , 由正方体的性质可得 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 因为 $AE \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BD \perp AE$, 设 F 为 BB_1 的中点, 连接 EF, AF , 则 $EF \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 因为 $BP \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $EF \perp BP$, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, P 为 A_1B_1 的中点, 则 $\triangle ABF \cong \triangle BB_1P$, 所以 $\angle FAB = \angle PBB_1$, 又 $\angle ABP + \angle PBB_1 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\angle ABP + \angle FAB = \frac{\pi}{2}$, 所以 $AF \perp BP$, 又 $AF \cap EF = F$, $AF, EF \subset$ 平面 AEF , 所以 $BP \perp$ 平面 AEF , 又 $AE \subset$ 平面 AEF , 所以 $BP \perp AE$, 又 $BD \cap BP = B$, $BD, BP \subset$ 平面 PBD , 所以 $AE \perp$ 平面 PBD , 故 B 正确; 如图③, 当 P 运动时, P 到平面 ABD 的距离保持不变为 3, 又 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$, 所以 $V_{A-PBD} = V_{P-ABD} = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$, 所以三棱锥 $A-PBD$ 的体积为定值, 故 C 错误; 由 C 可知, 三棱锥 $A-PBD$ 的体积为定值, 设点 A 到平面 PBD 的距离为 d , AB 与平面 PBD 所成的角为 θ , 则 $d = \frac{3V_{A-PBD}}{S_{\triangle PBD}} = \frac{27}{2S_{\triangle PBD}}$, 显然当 $\lambda = 0$ 时, $\triangle PBD$ 的面积最大为 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (3\sqrt{2})^2 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, 则 $d_{\min} = \frac{27}{2 \times \frac{9\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$, 此时 AB 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\sin \theta = \frac{d}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $\lambda = 1$ 时, $\triangle PBD$ 的面积最小为 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3 = \frac{9\sqrt{2}}{2}$, 则 $d_{\max} = \frac{27}{2 \times \frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 此时 AB 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\sin \theta = \frac{d}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 1$, 所以 AB 与平面 PBD 所成角的正弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 故 D 正确. 故选 ABD.





11. BC 【解析】根据题意,小郡前进1步的概率和前进2步的概率都是 $\frac{1}{2}$,所以 $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$,故选项A错误.当 $n \geq 3$ 时,前进几步是由两部分组成的,即先进 $n-1$ 步,再前进1步,其概率为 $\frac{1}{2}p_{n-1}$,或者先进 $n-2$ 步,再前进2步,其概率为 $\frac{1}{2}p_{n-2}$,所以 $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} (n \geq 3)$,故选项B正确.因为 $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} (n \geq 3)$,所以 $2p_n + p_{n-1} = 2p_{n-1} + p_{n-2} (n \geq 3)$,而 $2p_2 + p_1 = 2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 2$,所以 $2p_n + p_{n-1} = 2 (n \geq 2)$,即 $p_n = 1 - \frac{1}{2}p_{n-1} (n \geq 2)$,故选项C正确.因为当 $n \geq 2$ 时, $p_n = 1 - \frac{1}{2}p_{n-1}$,所以 $p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - \frac{2}{3})$,又 $p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$,所以数列 $\{p_n - \frac{2}{3}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{6}$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,所以 $p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$,

所以 $p_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$.当 n 为奇数时, $n-1$ 为偶数,则 $p_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$,此时数列 $\{p_n\}$ 是递增数列,所以 $p_n < \frac{2}{3}$;当 n 为偶数时, $n-1$ 为奇数,则 $p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times (\frac{1}{2})^{n-1}$,此时数列 $\{p_n\}$ 是递减数列,所以 $p_n \leq p_2 = \frac{3}{4}$.综上,当 $n=2$ 时,概率最大,即小郡一共前进2步的概率最大,故选项D错误.故选BC.

12. $-\frac{3}{5}$ 【解析】 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \cos[\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}] = \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{3}{5}$.
13. 17 【解析】令 $x=1$,得 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_9 = -1$,又 $(1-2x)^9$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_9^r (-2x)^r = C_9^r (-2)^r x^r (0 \leq r \leq 9 \text{ 且 } r \in \mathbb{N})$,所以 $a_1 = (-2)^1 \times C_9^1 = -18$,所以 $a_0 + \sum_{i=2}^9 a_i = -1 - (-18) = 17$.
14. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 【解析】连接 F_2M ,设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,因为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,所以由 $F_1M \parallel F_2N, |F_1M| = 2|F_2N|$,即 $\overrightarrow{F_1M} = 2\overrightarrow{F_2N}$,得 $\begin{cases} x_1 + c = 2(x_2 - c), \\ y_1 = 2y_2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3c, \\ y_1 = 2y_2 \end{cases}$ ①,又 $\overrightarrow{F_1N} \cdot$

$\overrightarrow{MN} + \frac{a^2}{9} = |F_1F_2|^2$,所以 $(x_2 + c)(x_2 - x_1) + y_2(y_2 - y_1) + \frac{a^2}{9} = 4c^2$,将①式代入得, $(x_2 + c)(3c - x_2) - y_2^2 + \frac{a^2}{9} = 4c^2$,即 $(x_2 + c)(x_2 - 3c) + y_2^2 + 4c^2 = \frac{a^2}{9}$,配方整理得 $(x_2 - c)^2 + y_2^2 = \frac{a^2}{9}$,所以 $|F_2N|^2 = \frac{a^2}{9}$,即 $|F_2N| = \frac{a}{3}$,则 $|F_1M| = \frac{2a}{3}$,又由 $|F_1N| + |F_2N| = 2a$, $|F_1M| + |F_2M| = 2a$,得 $|F_1N| = \frac{5a}{3}, |F_2M| = \frac{4a}{3}$.因为 $F_1M \parallel F_2N$,所以 $\angle MF_1F_2 + \angle NF_2F_1 = \pi$,所以 $\cos \angle MF_1F_2 + \cos \angle NF_2F_1 = 0$.根据余弦定理,得 $\cos \angle MF_1F_2 = \frac{|MF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - |MF_2|^2}{2|MF_1| \cdot |F_1F_2|} = \frac{\frac{4}{9}a^2 + 4c^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \times \frac{2}{3}a \times 2c} = \frac{3c^2 - a^2}{2ac}$, $\cos \angle NF_2F_1 = \frac{|NF_2|^2 + |F_2F_1|^2 - |NF_1|^2}{2|NF_2| \cdot |F_2F_1|} = \frac{\frac{1}{9}a^2 + 4c^2 - \frac{25}{9}a^2}{2 \times \frac{1}{3}a \times 2c} = \frac{6c^2 - 4a^2}{2ac}$,所以 $\frac{3c^2 - a^2}{2ac} + \frac{6c^2 - 4a^2}{2ac} = 0$,解得 $9c^2 = 5a^2$,所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

考卷II 解答·标准练

- 解答1 “15~17题”43分练
15. 解:(1)因为 $a^2 \cos B + ab \cos A = 2c$,所以 $a(a \cos B + b \cos A) = 2c$,……1分由正弦定理得 $a(\sin A \cos B + \sin B \cos A) = 2 \sin C$,……2分所以 $a \sin(A+B) = 2 \sin C$.……3分因为 $A+B = \pi - C$,所以 $\sin(A+B) = \sin C$,……4分故 $a \sin C = 2 \sin C$,又 $\sin C > 0$,所以 $a = 2$.……6分(2)由(1)及已知,有 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - 4}{2bc} = -\frac{1}{2}$,……7分可得 $b^2 + c^2 + bc = 4$,……8分又 $a+b+c = 2+\sqrt{5}$,所以 $b+c = \sqrt{5}$,……9分所以 $(b+c)^2 - bc = 5 - bc = 4$,得 $bc = 1$,……11分故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$.……13分
16. 解:(1)由题可得,甲赢得比赛有以下三种情况:

前三局甲获胜,概率为 $P_1 = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$;……2分比赛四局,甲前三局中胜两局负一局,第四局甲胜,概率为 $P_2 = C_3^2 \times (\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;……3分比赛五局,甲前四局中胜两局负两局,第五局甲胜,概率为 $P_3 = C_4^2 \times (\frac{2}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^2 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$.……5分所以甲赢得比赛的概率 $P = \frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$.……7分(2)设两人的比赛局数为 X ,则随机变量 X 的可能取值为3,4,5,……9分则 $P(X=3) = (\frac{2}{3})^3 + (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{3}$,……10分 $P(X=4) = C_3^2 \times (\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} +$

- $C_3^2 \times (\frac{1}{3})^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{27}$,……11分 $P(X=5) = 1 - P(X=4) - P(X=3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{10}{27} = \frac{8}{27}$,……12分则 $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{10}{27} + 5 \times \frac{8}{27} = \frac{107}{27}$.……15分
17. 解:(1)证明:如图①,取 AA_1 的中点 M ,连接 MP, MB .在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 A_1ADD_1 是梯形, $A_1D_1 = 2, AD = 4$,又点 M, P 分别是棱 A_1A, D_1D 的中点,所以 $MP \parallel AD$,且 $MP = \frac{A_1D_1 + AD}{2} = 3$.……2分在正方形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD, BC = 4$,又 $BQ = 3QC$,所以 $BQ = 3$,可得 $MP \parallel BQ$ 且 $MP = BQ$,所以四边形 $BMPQ$ 是平行四边形,所以 $PQ \parallel MB$.……4分

因为 $MB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , $PQ \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $PQ \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .

..... 6 分
(2)方法一:在平面 AA_1D_1D 中,过 A_1 作 $A_1O \perp AD$ 于 O .

因为平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 $ABCD$,平面 $AA_1D_1D \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $A_1O \perp AD$, $A_1O \subset$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ 7 分

在正方形 $ABCD$ 中,过 O 作 AB 的平行线交 BC 于点 N , 则 $ON \perp OD$.

以 O 为原点, ON, OD, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图②所示的空间直角坐标系.

因为四边形 AA_1D_1D 是等腰梯形, $A_1D_1 = 2, AD = 4$, 所以 $AO = 1$,

又 $A_1A = D_1D = \sqrt{17}$, 所以 $A_1O = 4$.
易得 $B(4, -1, 0), D(0, 3, 0), C(4, 3, 0), D_1(0, 2, 4)$, 则 $P(0, \frac{5}{2}, 2)$, 所以 $\overrightarrow{DC} =$

$(4, 0, 0), \overrightarrow{DP} = (0, -\frac{1}{2}, 2), \overrightarrow{CB} = (0, -4, 0)$ 9 分

设 $\overrightarrow{CQ} = \lambda \overrightarrow{CB} = (0, -4\lambda, 0) (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ} = (4, -4\lambda, 0)$.

设平面 PDQ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\frac{1}{2}y + 2z = 0, \\ 4x - 4\lambda y = 0, \end{cases}$

令 $z = 1$, 得 $\mathbf{m} = (4\lambda, 4, 1)$, 11 分
易知平面 DCQ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 12 分

设二面角 $P-QD-C$ 的平面角为 θ , 由题意得 $|\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

又 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(4\lambda)^2 + 17}}$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{(4\lambda)^2 + 17}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$, 解得 $\lambda = \frac{3}{4}$

或 $\lambda = -\frac{3}{4}$ (舍), 此时 $CQ = \frac{3}{4} \times 4 = 3$,

$BQ = 1$ 14 分

所以当二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时, 线段 BQ 的长为 1. ... 15 分

方法二:在平面 AA_1D_1D 中,过 A_1 作 $A_1O \perp AD$ 于 O .

因为平面 $AA_1D_1D \perp$ 平面 $ABCD$,平面 $AA_1D_1D \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $A_1O \perp AD$, $A_1O \subset$ 平面 AA_1D_1D , 所以 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$ 7 分

在正方形 $ABCD$ 中,过 O 作 AB 的平行线交 BC 于点 N , 则 $ON \perp OD$.

以 O 为原点, ON, OD, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图②所示的空间直角坐标系.

因为四边形 AA_1D_1D 是等腰梯形, $A_1D_1 = 2, AD = 4$, 所以 $AO = 1$,

又 $A_1A = D_1D = \sqrt{17}$, 所以 $A_1O = 4$.

易得 $D(0, 3, 0), D_1(0, 2, 4)$, 则 $P(0, \frac{5}{2}, 2)$,

所以 $\overrightarrow{DP} = (0, -\frac{1}{2}, 2)$ 9 分

设 $Q(4, t, 0) (-1 \leq t \leq 3)$, 则 $\overrightarrow{DQ} = (4, t - 3, 0)$.

设平面 PDQ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\frac{1}{2}y + 2z = 0, \\ 4x + (t - 3)y = 0, \end{cases}$

令 $z = 1$, 得 $\mathbf{m} = (3 - t, 4, 1)$, ... 11 分

易知平面 DCQ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 12 分

设二面角 $P-QD-C$ 的平面角为 θ , 由题意得 $|\cos \theta| = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$.

又 $|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{(3 - t)^2 + 17}}$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{(3 - t)^2 + 17}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$, 解得 $t = 0$

或 $t = 6$ (舍), 此时 $BQ = 1$ 14 分

所以当二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时, 线段 BQ 的长为 1. ... 15 分

方法三:如图③,在平面 A_1ADD_1 中,过 P 作 $PH \perp AD$, 垂足为 H .

因为平面 $A_1ADD_1 \perp$ 平面 $ABCD$,平面 $A_1ADD_1 \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PH \perp AD$, $PH \subset$ 平面 A_1ADD_1 , 所以 $PH \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $DQ \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PH \perp DQ$ 7 分

在平面 $ABCD$ 中,过 H 作 $HG \perp DQ$, 垂足为 G , 连接 PG .

因为 $PH \perp DQ, HG \perp DQ, PH \cap HG = H, PH, HG \subset$ 平面 PHG ,

所以 $DQ \perp$ 平面 PHG , 又 $PG \subset$ 平面 PHG , 所以 $DQ \perp PG$.

因为 $HG \perp DQ, PG \perp DQ$,

所以 $\angle PGH$ 是二面角 $P-QD-A$ 的平面角. 9 分

在四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 A_1ADD_1 是梯形, $A_1D_1 = 2, AD = 4$, $A_1A = D_1D = \sqrt{17}$, 点 P 是棱 DD_1 的中点,

所以 $PH = 2, DH = \frac{1}{2}$ 10 分

设 $BQ = x (0 \leq x \leq 4)$,

则 $CQ = 4 - x, DQ = \sqrt{4^2 + (4 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 32}$,

连接 QH , 在 $\triangle QHD$ 中, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 =$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{x^2 - 8x + 32} \times HG$, 从而 $HG =$

$\frac{2}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}$ 12 分

因为二面角 $P-QD-C$ 的平面角与二面角 $P-QD-A$ 的平面角互补,

且二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$,

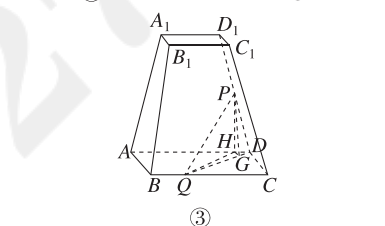
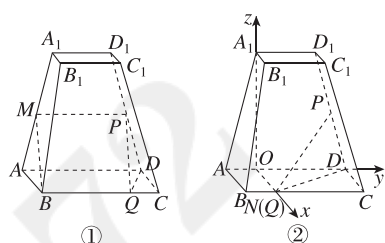
所以 $\sin \angle PGH = \frac{5\sqrt{26}}{26}$,

从而 $\tan \angle PGH = 5$.

所以在 $Rt \triangle PHG$ 中, $\frac{PH}{HG} =$

$\sqrt{x^2 - 8x + 32} = 5$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 7$ (舍). 14 分

所以当二面角 $P-QD-C$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ 时, 线段 BQ 的长为 1. ... 15 分



解第 2 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 因为 $a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab = c^2$,

所以 $a^2 + b^2 - c^2 = -\sqrt{2}ab$,

则 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-\sqrt{2}ab}{2ab} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 3 分

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{3\pi}{4}$ 5 分

(2)方法一:根据正弦定理,

由 $c = 2b \cos B$, 得 $\sin C = 2 \sin B \cos B = \sin 2B$, 7 分

所以 $C = 2B$ 或 $C + 2B = \pi$ 8 分

当 $C = 2B$ 时, $C = \frac{3\pi}{4}, B = \frac{3\pi}{8}$, 此时 $B + C > \pi$, 不符合题意; 9 分

当 $C + 2B = \pi$ 时, $A = B = \frac{\pi}{8}$, 则 $a =$

$b = 1$, 11 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 13 分

方法二:根据正弦定理, 由 $c = 2b \cos B$, 得 $\sin C = 2 \sin B \cos B = \sin 2B$,

..... 7 分

所以 $\sin C = \sin 2B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 8 分

因为 $C = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $B \in (0, \frac{\pi}{4})$,

则 $2B \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $2B = \frac{\pi}{4}$, 得 $B =$

$\frac{\pi}{8}, \dots\dots\dots 9$ 分

则 $A = \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$, 得 $a = b = 1$,
 $\dots\dots\dots 11$ 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} ab \sin C =$
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\dots\dots\dots 13$ 分

16. 解: (1) 函数 $f(x) = \cos x + x \sin x, x \in$
 $(-\pi, \pi)$, 求导得 $f'(x) = -\sin x +$
 $\sin x + x \cos x = x \cos x$. $\dots\dots\dots 2$ 分

当 $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单
 调递增; 当 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,
 $f(x)$ 单调递减;

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递
 增; 当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单
 调递减.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\pi,$
 $-\frac{\pi}{2})$, $(0, \frac{\pi}{2})$, 单调递减区间为
 $(-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi)$. $\dots\dots\dots 4$ 分

$f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 1$. $\dots\dots\dots 5$ 分
 (2) 证明: 当 $x \in [0, \pi)$ 时, 令 $F(x) =$
 $e^x + e^{-x} - 2(\cos x + x \sin x)$, $\dots\dots\dots 6$ 分
 求导得 $F'(x) = e^x - e^{-x} - 2x \cos x \geq$
 $e^x - e^{-x} - 2x$. $\dots\dots\dots 9$ 分
 令 $\varphi(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 求导得
 $\varphi'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} -$
 $2 = 0$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号),
 $\dots\dots\dots 12$ 分

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上单调递增, 则
 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, $\dots\dots\dots 13$ 分
 所以 $F'(x) \geq 0$, 则 $F(x)$ 在 $[0, \pi)$ 上单
 调递增, $\dots\dots\dots 14$ 分
 因此 $F(x) \geq F(0) = 0$,
 所以 $2f(x) \leq e^x + e^{-x}$. $\dots\dots\dots 15$ 分

17. 解: (1) 由题知 $X \sim B(8, \frac{1}{4})$,

则 $E(X) = 8 \times \frac{1}{4} = 2$. $\dots\dots\dots 4$ 分

因为每道题答对得 5 分, 不答或答错得
 0 分, 所以此人的得分为 $5X$, 故此人得
 分的数学期望为 $E(5X) = 5E(X) = 5 \times$
 $2 = 10$. $\dots\dots\dots 6$ 分

(2) 由题知此人答对 k 道题的概率为
 $P(X = k) = C_8^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}, k =$
 $0, 1, 2, \dots, 8$,

记 $p_k = P(X = k)$, $\dots\dots\dots 8$ 分

则 $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{P(X = k)}{P(X = k-1)} =$
 $\frac{C_8^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{8-k}}{C_8^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{9-k}} =$

$$\frac{\frac{8!}{k!(8-k)!} \times \frac{1}{4}}{\frac{8!}{(k-1)!(9-k)!} \times \frac{3}{4}} = \frac{9-k}{3k} = 1 +$$

$$\frac{9-4k}{3k}, k = 1, 2, \dots, 8. \dots\dots\dots 12$$

当 $k = 1, 2$ 时, $p_k > p_{k-1}$, 即 $p_2 > p_1 >$
 p_0 ; $\dots\dots\dots 13$ 分

当 $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 时, $p_k < p_{k-1}$,
 即 $p_8 < p_7 < \dots < p_2$. $\dots\dots\dots 14$ 分
 所以 p_2 最大, 所以此人答对 2 道题的
 概率最大. $\dots\dots\dots 15$ 分

解答 3 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 因为 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin A \sin B =$
 $\sin^2 C$, 所以由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} =$

$\frac{c}{\sin C}$ 可得 $a^2 + b^2 + ab = c^2$. $\dots\dots\dots 2$ 分

由余弦定理可得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$
 $\frac{a^2 + b^2 - (a^2 + b^2 + ab)}{2ab} = -\frac{1}{2}$.
 $\dots\dots\dots 5$ 分

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.
 $\dots\dots\dots 6$ 分

(2) 由 a, b, c 成等差数列, 可得 $a + c =$
 $2b$ ①, $\dots\dots\dots 7$ 分

因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}, C = \frac{2\pi}{3}$, 所
 以 $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, 即 $ab = 15$ ②,

$\dots\dots\dots 9$ 分

由 (1) 知 $a^2 + b^2 + ab = c^2$ ③, 由 ①②③
 解得 $a = 3, b = 5, c = 7$. $\dots\dots\dots 12$ 分

所以 $a + b + c = 15$,
 故 $\triangle ABC$ 的周长为 15. $\dots\dots\dots 13$ 分

16. 解: (1) 设 C 的半焦距为 c , 则 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\dots\dots\dots 1$ 分

故 $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{2a^2}{3}$. $\dots\dots\dots 3$ 分

将 $(1, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 代入 C 的方程, 有 $\frac{1}{a^2} +$
 $\frac{4}{3b^2} = 1$, 故 $\frac{3}{a^2} = 1$,
 则 $a^2 = 3, b^2 = 2$, $\dots\dots\dots 6$ 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. $\dots\dots\dots 7$ 分

(2) 由 (1) 可知 C 的左焦点为 $(-1, 0)$,
 $\dots\dots\dots 8$ 分

故过左焦点且斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线为 l :
 $y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}$. $\dots\dots\dots 9$ 分

将 l 与 C 的方程联立得
 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}, \end{cases}$ 消去 y 得 $2x^2 + 3x = 0$.
 $\dots\dots\dots 10$ 分

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,
 则不妨令 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$, $\dots\dots\dots 11$ 分

故 $|MN| = \sqrt{3}|x_1 - x_2| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,
 $\dots\dots\dots 12$ 分

且 P 到 l 的距离 $d = \frac{|\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2}|}{\sqrt{2+1}} =$
 $\frac{2\sqrt{6}+2}{3}$, $\dots\dots\dots 13$ 分

所以 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{|MN| \cdot d}{2} =$
 $\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{6}+2}{3} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.
 $\dots\dots\dots 15$ 分

17. 解: (1) 证明: 如图, E
 过点 B 作 CD 的平
 行线, 即为 l . 理由
 如下: $\because AE \parallel CD$,
 $AE \subset$ 平面 AEB ,
 $CD \not\subset$ 平面 AEB ,
 $\therefore CD \parallel$ 平面 AEB .
 又 $\because CD \subset$ 平面 BCD , 且平面 $AEB \cap$ 平面
 $BCD = l, \therefore l \parallel CD$.
 又 $\because AB \perp l, \therefore AB \perp CD$. $\dots\dots\dots 4$ 分
 又 $\because B$ 在以 AC 为直径的圆上运动,
 $\therefore AB \perp BC$.
 又 $\because BC \cap CD = C, BC, CD \subset$ 平面
 $BCD, \therefore AB \perp$ 平面 $BCD, \therefore BD \subset$ 平面
 $BCD, \therefore AB \perp BD$. $\dots\dots\dots 6$ 分
 (2) 在 $\triangle ACD$ 中, $AC = 2CD = 2$,
 $\angle ACD = 60^\circ$, 由余弦定理可得 $DA =$
 $\sqrt{3}, \therefore DA^2 + DC^2 = AC^2, \therefore \angle ADC =$
 90° , 故 $CD \perp DA$.
 由 (1) 知 $AB \perp CD, AB \cap DA = A, AB,$
 $DA \subset$ 平面 $ABD, \therefore CD \perp$ 平面 ABD ,
 又 $\because AE \parallel CD, \therefore AE \perp$ 平面 ABD .
 $\dots\dots\dots 9$ 分
 令 $EN \cap AD = H$, 则 $\angle EHA$ 即为直线
 EN 与平面 ABD 所成的角. $\dots\dots\dots 11$ 分
 $\because \angle EHA = \frac{\pi}{2} - \angle AEH$,
 $\therefore \sin \angle EHA = \cos \angle AEH$.
 在 $\triangle AEN$ 中, $EN^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times$
 $2 \times \cos 120^\circ = 7$, $\dots\dots\dots 13$ 分
 $\therefore \cos \angle AEH = \cos \angle AEN =$
 $\frac{AE^2 + EN^2 - AN^2}{2AE \cdot EN} = \frac{4 + 7 - 1}{2 \times 2 \times \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$,
 即直线 EN 与平面 ABD 所成角的正弦
 值为 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. $\dots\dots\dots 15$ 分

解答 4 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 零假设为 H_0 : 该校学生选择乒
 乓球还是羽毛球与性别无关.

$$\chi^2 = \frac{150 \times (50 \times 40 - 25 \times 35)^2}{75 \times 75 \times 85 \times 65} = \frac{1350}{221} \approx$$

6.109 > 3.841 = $x_{0.05}$, $\dots\dots\dots 4$ 分

依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验,
 推断 H_0 不成立, 即认为该校学生选择
 乒乓球还是羽毛球与性别有关联, 此推
 断犯错误的概率不大于 0.05. $\dots\dots\dots 6$ 分
 (2) 女生中乒乓球组与羽毛球组抽取的

人数比例为 $35:40=7:8$, 故抽取的 15 人中, 乒乓球队的有 $15 \times \frac{7}{7+8} = 7$ (人),

羽毛球组的有 $15 \times \frac{8}{7+8} = 8$ (人),

..... 7 分
故 X 的可能取值为 $0, 1, 2$, 8 分

$$P(X=0) = \frac{C_7^0 C_8^0}{C_{15}^0} = \frac{4}{15}, \text{ 9 分}$$

$$P(X=1) = \frac{C_7^1 C_8^1}{C_{15}^2} = \frac{8}{15}, \text{ 10 分}$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2 C_8^0}{C_{15}^2} = \frac{1}{5}, \text{ 11 分}$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{14}{15},$$

..... 13 分

16. 解: (1) 证明: 由题意得 $AB = BC = CD = DA = AP = PD = 2$,

又 $PC = PB = 2\sqrt{2}$, 所以 $PD^2 + CD^2 = PC^2$, $AP^2 + AB^2 = PB^2$, 2 分

所以 $DC \perp PD$, $AB \perp AP$ 3 分

因为底面 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AB \parallel CD$, 故 $DC \perp AP$, 又 $AP \subset$ 平面 PAD , $DP \subset$ 平面 PAD , $AP \cap DP = P$, 所以 $DC \perp$ 平面 PAD 5 分

又 $DC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $DC \perp$

平面 PAD , 而 $AD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $DC \perp DA$, 故

底面 $ABCD$ 为正方形. 7 分

设 DA 的中点为 O , 连接 OP , 在平面 $ABCD$ 内作 $OF \parallel DC$ 交 BC 于 F , 因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形, 所以 $PO \perp AD$, 故 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

如图, 以 O 为坐标原点, 分别以 OA , OF , OP 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, \sqrt{3})$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(-1, 2, 0)$, $E(-\frac{1}{2}, 1,$

$\frac{\sqrt{3}}{2})$, 8 分

故 $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$,

$\overrightarrow{BE} = (-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 9 分

设 $n = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 AEB 的法向

量, 则有 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} 2y_1 = 0, \\ -\frac{3}{2}x_1 - y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } n =$$

$(\sqrt{3}, 0, 3)$ 11 分

设 $m = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 CEB 的法向

量, 则有 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{BE} = 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} -2x_2 = 0, \\ -\frac{3}{2}x_2 - y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0, \end{cases} \text{ 可取 } m =$$

$(0, \sqrt{3}, 2)$, 13 分

$$\text{则 } |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m||n|} = \frac{6}{2\sqrt{3} \times \sqrt{7}} =$$

$$\frac{\sqrt{21}}{7}, \text{ 14 分}$$

所以平面 AEB 与平面 CEB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 15 分

17. 解: (1) 由题意知 $b_1 - b_2 = 8$, $b_3 - b_1 = 4$, $a_1 + b_1 = 4$, 1 分

因为 $a_{2n-1} = b_{2n-1} + 12m$, $a_{2n} = mb_{2n}$, 所

$$\text{以 } \begin{cases} a_1 = b_1 + 12m, \\ a_2 = mb_2, \\ a_3 = b_3 + 12m, \\ a_4 = mb_4, \\ a_1 + b_1 = 2a_1 - 12m. \end{cases} \text{ 2 分}$$

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } \begin{cases} a_3 - a_1 = b_3 - b_1 = 4 = 2d, \\ a_4 - a_2 = m(b_4 - b_2) = 8m = 2d, \\ a_1 + b_1 = 2a_1 - 12m = 4, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} d = 2, \\ m = \frac{1}{2}, \\ b_1 = -1, \\ a_1 = 5, \end{cases} \text{ 5 分}$$

所以 $a_n = 5 + (n-1) \times 2 = 2n + 3$, 所以

m 的值为 $\frac{1}{2}$, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n =$

$2n + 3$ 7 分

(2) 由 (1) 知, $a_n = 2n + 3$, $b_{2n-1} = a_{2n-1} - 6$, $b_{2n} = 2a_{2n}$, 8 分

$$\text{所以 } S_{2n} = (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2n}) = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} - 6n) + 2(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}) = \frac{n(a_1 + a_{2n-1})}{2} - 6n +$$

$$2 \times \frac{n(a_2 + a_{2n})}{2} = \frac{n(5 + 4n + 1)}{2} - 6n +$$

$$n(7 + 4n + 3) = 6n^2 + 7n, \text{ 14 分}$$

所以 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $S_{2n} = 6n^2 + 7n$ 15 分

解答 5 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 由题意知 $a_n > 0$, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} a_2 a_4 = 16, \\ S_5 = S_3 + 24, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a_3 = 4, \\ a_4 + a_5 = 24, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 q^2 = 4, \\ a_1 q^3 + a_1 q^4 = 24, \end{cases} \text{ 2 分}$$

整理得 $q^2 + q - 6 = 0$, 4 分

解得 $q = 2$ 或 $q = -3$ (舍去), 所以 $a_n = a_3 q^{n-3} = 2^{n-1}$ 6 分

(2) 由 (1) 可知 $a_n + \log_2 a_n = 2^{n-1} + n - 1$, 7 分

故 $T_n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + (0 +$

$$1 + 2 + \cdots + n - 1) = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

..... 10 分

显然, T_n 随着 n 的增大而增大,

又 $T_{10} = 2^{10} - 1 + 45 = 1068 < 2024$,

..... 11 分

$T_{11} = 2^{11} - 1 + 55 = 2102 > 2024$,

..... 12 分

所以满足 $T_n < 2024$ 的最大整数 $n = 10$.

..... 13 分

16. 解: (1) 由题意知 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} =$

3.5 , 1 分

$$\bar{y} = \frac{1}{6} \times (15.4 + 25.4 + 35.4 + 85.4 + 155.4 + 195.4) = 85.4, \text{ 2 分}$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 - 6 \times 3.5^2 = 17.5, \text{ 3 分}$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^6 y_i^2 - 6\bar{y}^2}} =$$

$$\frac{2463.4 - 6 \times 3.5 \times 85.4}{\sqrt{17.5} \times 20 \sqrt{70}} = \frac{670}{20 \times 35} \approx 0.96, \text{ 7 分}$$

$$(2) \text{ 由题知 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2} =$$

$$\frac{2463.4 - 6 \times 3.5 \times 85.4}{17.5} = \frac{268}{7},$$

..... 9 分

$$\text{所以 } \hat{a} = 85.4 - 3.5 \times \frac{268}{7} = -\frac{243}{5},$$

..... 11 分

$$\text{所以 } y \text{ 关于 } x \text{ 的经验回归方程为 } \hat{y} = \frac{268}{7}x - \frac{243}{5}, \text{ 13 分}$$

所以预测 2025 年 2 月该公司的销售金额为 $\frac{268}{7} \times 7 - \frac{243}{5} = 219.4$ (万元).

..... 15 分

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{64}{9b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$$

..... 2 分

$$\text{解得 } \begin{cases} c^2 = 1, \\ b^2 = 8, \\ a^2 = 9, \end{cases} \text{ 4 分}$$

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

..... 5 分

(2) 设直线 l 的方程为 $x = my - 1$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 由 (1) 知 $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$.

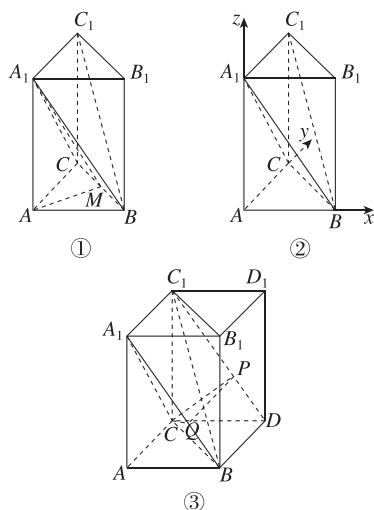
$$\text{由 } \begin{cases} x = my - 1, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (8m^2 + 9)y^2 -$$

$16my-64=0$, 7 分
 则 $y_1+y_2=\frac{16m}{8m^2+9}$, $y_1y_2=\frac{-64}{8m^2+9}$,
 $\Delta>0$ 9 分
 直线 AC 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$,
 直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$,
 联立直线 AC, BD 的方程, 得 $\frac{x+3}{x-3}=\frac{y_2(x_1+3)}{y_1(x_2-3)}=\frac{y_2(my_1+2)}{y_1(my_2-4)}=\frac{-64m}{8m^2+9}+2y_2=\frac{-64m}{8m^2+9}-4y_1=\frac{-32m}{8m^2+9}+y_2=\frac{-32m}{8m^2+9}-2\left(\frac{16m}{8m^2+9}-y_2\right)=\frac{-32m}{8m^2+9}+y_2=\frac{1}{2}$, 11 分
 解得 $x=-9, y=\frac{-6y_1}{x_1+3}$, 即 $P(-9, \frac{-6y_1}{x_1+3})$ 13 分
 因为点 O 是 AB 的中点, $OM\parallel PA$, 所以 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$,
 所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(-3,0)\cdot(-6, \frac{-6y_1}{x_1+3})=9$,
 所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$ 是定值, 且该定值为 9. 15 分

解答 6 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 证明: 如图①, 取 BC 的中点 M, 连接 MA, MA₁.
 因为 AB=AC, A₁B=A₁C, 所以 BC⊥AM, BC⊥A₁M, 因为 AM, A₁M⊂平面 A₁MA, 且 AM∩A₁M=M, 所以 BC⊥平面 A₁MA, 2 分
 因为 A₁A⊂平面 A₁MA, 所以 BC⊥A₁A, 又因为 A₁A∥B₁B, 所以 B₁B⊥BC. 3 分
 因为平面 BB₁C₁C⊥平面 ABC, 平面 BB₁C₁C∩平面 ABC=BC, 且 B₁B⊂平面 BB₁C₁C, 所以 B₁B⊥平面 ABC, 5 分
 因为 A₁A∥B₁B, 所以 A₁A⊥平面 ABC. 6 分
 (2) 方法一: 因为 ∠BAC=90°, 且 BC=2, 所以 AB=AC=√2.
 由(1)知 A₁A⊥AB, A₁A⊥AC, 以 A 为原点, AB, AC, AA₁ 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图②所示的空间直角坐标系, 则 A₁(0,0,2), B(√2,0,0), C(0,√2,0), C₁(0,√2,2),
 所以 $\overrightarrow{A_1B}=(\sqrt{2},0,-2), \overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{2},-2)$,

$-2), \overrightarrow{A_1C_1}=(0,\sqrt{2},0)$ 8 分
 设平面 A₁BC 的法向量为 $\mathbf{m}=(x_1, y_1, z_1)$,
 则 $\begin{cases} \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0, \\ \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} \sqrt{2}x_1-2z_1=0, \\ \sqrt{2}y_1-2z_1=0, \end{cases}$
 令 $z_1=1$, 则 $\mathbf{m}=(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ 10 分
 设平面 A₁BC₁ 的法向量为 $\mathbf{n}=(x_2, y_2, z_2)$,
 则 $\begin{cases} \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0, \\ \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} \sqrt{2}x_2-2z_2=0, \\ \sqrt{2}y_2=0, \end{cases}$
 令 $z_2=1$, 则 $\mathbf{n}=(\sqrt{2}, 0, 1)$ 12 分
 设平面 A₁BC 与平面 A₁BC₁ 的夹角为 θ , 则 $\cos\theta=\frac{|\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}|}{|\mathbf{m}||\mathbf{n}|}=\frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,
 所以平面 A₁BC 与平面 A₁BC₁ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 13 分
 方法二: 由题知三棱柱 ABC-A₁B₁C₁ 是底面为直角三角形的直三棱柱, 将直三棱柱 ABC-A₁B₁C₁ 补成长方体 AB-DC-A₁B₁D₁C₁, 如图③.
 连接 C₁D, 则平面 A₁BC₁ 即为平面 A₁BDC₁, 过点 C 作 CP⊥C₁D, 垂足为 P, 再过 P 作 PQ⊥A₁B, 垂足为 Q, 连接 CQ.
 因为 BD⊥平面 CDD₁C₁, 且 CP⊂平面 CDD₁C₁, 所以 BD⊥CP. 7 分
 又因为 CP⊥C₁D, BD, C₁D⊂平面 A₁BDC₁, 且 BD∩C₁D=D, 所以 CP⊥平面 A₁BDC₁, 又 PQ⊂平面 A₁BDC₁, 所以 CP⊥PQ. 9 分
 因为 A₁B⊂平面 A₁BDC₁, 所以 A₁B⊥CP, 又因为 PQ⊥A₁B, CP, PQ⊂平面 CPQ, 且 CP∩PQ=P, 所以 A₁B⊥平面 CPQ,
 因为 CQ⊂平面 CPQ, 所以 CQ⊥A₁B, 则 ∠CQP 为平面 A₁BC 与平面 A₁BC₁ 的夹角. 11 分
 在 △A₁BC 中, 由等面积法可得 CQ= $\frac{\sqrt{30}}{3}$. 易知 PQ=A₁C₁=√2, 又 CP⊥PQ, 所以 $\cos\angle CQP=\frac{PQ}{CQ}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,
 所以平面 A₁BC 与平面 A₁BC₁ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 13 分



16. 解: (1) $f'(x)=2e^{2x}-(2a-1)e^x-a=(2e^x+1)(e^x-a)$ 1 分
 ① 当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增. 2 分
 ② 当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\ln a$.
 当 $x\in(-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,
 当 $x\in(\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. 4 分
 综上所述, 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;
 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增. 5 分
 (2) 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 不可能有两个零点, 不符合题意, 故 $a>0$ 6 分
 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,
 因为 $f(x)$ 有两个零点, 所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a(1-a-\ln a)<0$, 8 分
 因为 $a>0$, 所以 $1-a-\ln a<0$ 9 分
 令 $g(a)=1-a-\ln a, a>0$, 10 分
 则 $g'(a)=-1-\frac{1}{a}<0$, 所以 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $g(1)=0$,
 所以当 $a>1$ 时, $g(a)<0$,
 即 $f(x)_{\min}<0$ 12 分
 方法一: 因为 $f(-1)=\frac{1}{e^2}-(2a-1)\frac{1}{e}+a=\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}+a\left(1-\frac{2}{e}\right)>0$,
 所以 $f(x)$ 在 $(-1, \ln a)$ 上有 1 个零点; 13 分
 令 $h(x)=e^x-x-1$, 则 $h'(x)=e^x-1$,
 由 $h'(x)>0$ 得 $x>0$,
 由 $h'(x)<0$ 得 $x<0$,
 所以函数 $h(x)=e^x-x-1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 所以 $h(x)\geq h(0)=0$, 所以当 $x>\ln a>0$ 时, $e^x>x+1$, 故 $-ax>-a(e^x-1)$, 所以 $f(x)>e^{2x}-(2a-1)e^x-a(e^x-1)=e^{2x}-(3a-1)e^x+a$,
 取 $x=\ln(3a)>\ln a$, 则 $f[\ln(3a)]>e^{2\ln(3a)}-(3a-1)e^{\ln(3a)}+a=9a^2-(3a-1)\times 3a+a=4a>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, \ln(3a))$ 上有 1 个零点. 14 分
 综上所述, 当 $f(x)$ 有两个零点时, $a>1$ 15 分
 方法二: 当 $x\rightarrow-\infty$ 时, $f(x)\rightarrow+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上有 1 个零点; 13 分
 当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $f(x)\rightarrow+\infty$, 则 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上有 1 个零点. 14 分
 综上所述, 当 $f(x)$ 有两个零点时, $a>1$ 15 分
 17. 解: (1) 由顾客的消费额 X (单位: 元) 服从正态分布 $N(130, 25^2)$, 得 $\mu=130, \sigma=25$, 1 分
 所以消费额 X 在 $[105, 180]$ 内的概率为

$P(105 \leq X \leq 180) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times (0.6827 + 0.9545) = 0.8186$, 4分
 因为该天该商场有 20 000 位顾客,所以估计该天消费额 X 在 $[105, 180]$ 内的人数约为 $0.8186 \times 20\,000 = 16\,372$.

..... 5分
 (2) 设事件 A_1 = “顾客中‘龙腾奖’”, 事件 A_2 = “顾客中‘旺旺奖’”, 事件 B = “顾客获得乙奖品”, 6分
 由题意知 $P(A_1) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$, $P(B|A_1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$, $P(B|A_2) = \frac{1}{4}$, 7分

设事件 D_1 = “3 枚骰子的点数之和为 6”, D_2 = “3 枚骰子的点数之和为 12”, D_3 = “3 枚骰子的点数之和为 18”, 则 $A_2 = D_1 + D_2 + D_3$.
 (i) 若 “3 枚骰子的点数之和为 6”, 则 3 枚骰子的点数为 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2. D_1 包含的样本点有 $C_3^2 C_1^1 + A_3^3 + 1 = 3 + 6 + 1 = 10$ (个). 8分
 (ii) 若 “3 枚骰子的点数之和为 12”, 则 3 枚骰子的点数为 1, 5, 6; 2, 5, 5; 2, 4, 6; 3, 4, 5; 3, 3, 6; 4, 4, 4. D_2 包含的样本点有 $A_3^3 + C_3^1 C_2^2 + A_3^3 + A_3^3 + C_3^2 C_1^1 + 1 = 6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 1 = 25$ (个). 9分
 (iii) 若 “3 枚骰子的点数之和为 18”, 则 3 枚骰子的点数为 6, 6, 6. D_3 包含的样本点有 1 个.

所以 $P(A_2) = \frac{10+25+1}{6^3} = \frac{36}{6^3} = \frac{1}{6}$.
 10分
 ① 由全概率公式可得 $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{8} \times \frac{7}{16} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{37}{384}$, 即顾客获得乙奖品的概率为 $\frac{37}{384}$ 12分
 ② 若顾客已获得乙奖品, 则其是 “龙腾奖” 而获得的概率是 $P(A_1|B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{7}{16}}{\frac{37}{384}} = \frac{21}{37}$, 14分

所以顾客已获得乙奖品, 则其是 “龙腾奖” 而获得的概率是 $\frac{21}{37}$ 15分

解答 7 “15~17 题” 43 分

15. 解: (1) 由题知 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$, 2分
 因为 $S = -\frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + c^2 - b^2)$, 所以 $\frac{1}{2} ac \cdot \sin B = -\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2ac \cdot \cos B$,

可得 $\tan B = -\sqrt{3}$, 4分
 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3}$ 5分

(2) 方法一: $\angle CBD = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$,
 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \frac{\pi}{2}} = AD = 2$, 6分

同理, 在 $\triangle CBD$ 中, 有 $\frac{CB}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2CD = 2$, 8分
 又 $\angle ADB + \angle CDB = \pi$,
 所以 $\sin \angle ADB = \sin \angle CDB$, 9分
 所以 $AB = CB$, 即 $a = c$ 10分
 在 $\triangle ABC$ 中, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos \angle ABC$, 即 $3^2 = c^2 + a^2 + ac = 3a^2$,
 可得 $a = \sqrt{3}$, 所以 $c = a = \sqrt{3}$, 12分
 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + 2\sqrt{3}$ 13分
 方法二: 由 (1) 可知 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$,
 又 $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\angle CBD = \frac{\pi}{6}$.
 6分

由题可知, $AD = 2DC = 2$,
 故 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$.
 8分
 因为 $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{BA} \right) = \frac{1}{3} c^2 - \frac{1}{3} ac = 0$, 9分
 又 $c > 0$, 所以 $a = c$, 则 $A = C = \frac{\pi}{6}$.
 11分
 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $c = AD \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, 12分
 故 $\triangle ABC$ 的周长为 $AB + BC + AC = \sqrt{3} + \sqrt{3} + 3 = 3 + 2\sqrt{3}$ 13分

16. 解: (1) 设椭圆 E 的焦距为 $2c (c > 0)$, 设椭圆上一点 $P(x_0, y_0) (-a \leq x_0 \leq a)$, 易知 $F_2(c, 0)$, 则 $|PF_2| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_0^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a} x_0\right)^2 - 2cx_0 + a^2} = \left| \frac{c}{a} x_0 - a \right|$, 显然当 $x_0 = a$ 时, $|PF_2|$ 取得最小值 $a - c$ 2分

由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a - c = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ c = 1, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases}$ 4分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
 5分
 (2) 设 $C(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,
 由 (1) 知 $|F_1 F_2| = 2, |F_2 A| = a - c = 1$.
 因为 $AB \parallel CF_1$, 所以 $\triangle CF_1 F_2 \sim \triangle BAF_2$, 得 $|CF_1| : |AB| = |F_1 F_2| : |F_2 A| = 2 : 1$, 所以 $y_1 = -2y_2$. ①.
 9分

由题知直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1$,
 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my + 1, \end{cases}$ 整理得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0$,
 得 $\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \\ y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}, \end{cases}$ 11分
 把 ① 式代入上式得 $\begin{cases} -y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \\ -2y_2^2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}, \end{cases}$
 得 $y_2^2 = \frac{36m^2}{(3m^2 + 4)^2} = \frac{9}{2(3m^2 + 4)}$,
 解得 $m = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 14分
 所以直线 l 的方程为 $x + \frac{2\sqrt{5}}{5}y - 1 = 0$
 或 $x - \frac{2\sqrt{5}}{5}y - 1 = 0$ 15分

17. 解: (1) 证明: 设 AC 与 BD 的交点为 O , 连接 OF , 如图.
 因为 $AD \parallel BC$, 且 $AB \perp AD$, 所以 $AB \perp BC$ 2分
 因为 $2AD = 2$, 所以 $AD = 1$,
 又 $AB = \sqrt{2}, BC = 2$,
 所以 $\tan \angle ABD = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \angle BCA = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 又 $\angle ABD, \angle BCA$ 均为锐角,
 所以 $\angle ABD = \angle BCA$,
 所以 $\angle BAC + \angle ABD = \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$, 4分
 所以 $\angle AOB = 90^\circ$,
 所以 $AO \perp OB$, 即 $AC \perp BD$.
 因为 $EA \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EA \perp BD$,
 因为 $EA \cap AC = A, EA, AC \subset$ 平面 EAC , 所以 $BD \perp$ 平面 EAC , 6分
 又 $BD \perp \alpha$, 所以平面 $\alpha \parallel$ 平面 EAC .
 7分

(2) 因为 $AB \perp AD, EA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 AB, AD, EA 两两垂直.
 以 A 为原点, AB, AD, EA 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 9分
 则 $A(0, 0, 0), D(0, 1, 0), B(-\sqrt{2}, 0, 0)$,

$E(0,0,2), C(-\sqrt{2}, 2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AD} = (0, 1, 0), \overrightarrow{BD} = (\sqrt{2}, 1, 0), \overrightarrow{BC} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BE} = (\sqrt{2}, 0, 2)$,

因为点 F 为棱 EC 的中点, 所以 $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1\right)$ 11 分

设平面 FBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BF} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + y + z = 0, \end{cases}$$

取 $x=2$, 得 $\mathbf{n} = (2, -2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

..... 13 分

设直线 AD 与平面 FBD 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{|-2\sqrt{2}|}{1 \times \sqrt{4+8+2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}, \text{ 14 分}$$

所以直线 AD 与平面 FBD 所成角的正

弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 15 分

解答 8 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 由题可得 $2\cos A - 3(2\cos^2 A - 1) = 3$, 即 $3\cos^2 A - \cos A = 0$, 2 分

解得 $\cos A = \frac{1}{3}$ 或 $\cos A = 0$ 5 分

(2) 方法一: 因为 $2b = 3c$, 所以由正弦定理得 $2\sin B = 3\sin C$, 6 分

即 $2\sin(A+C) = 3\sin C$,

即 $2\sin A \cos C + 2\sin C \cos A = 3\sin C$.

..... 8 分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以由 (1)

知 $\cos A = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

..... 10 分

所以 $\frac{4\sqrt{2}}{3} \cos C + \frac{2}{3} \sin C = 3\sin C$,

又 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 所以 $\sin C = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

..... 13 分

方法二: 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以

由 (1) 知 $\cos A = \frac{1}{3}$, 由余弦定理得

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{3}, \text{ 7 分}$$

又 $2b = 3c$, 所以 $\frac{9c^2 + c^2 - a^2}{3c^2} = \frac{1}{3}$, 可得

$$c^2 = \frac{4}{9}a^2, \text{ 9 分}$$

所以 $c = \frac{2}{3}a$, 所以 $\sin C = \frac{2}{3} \sin A$.

..... 11 分

因为 $\cos A = \frac{1}{3}$, 所以 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所

以 $\sin C = \frac{2}{3} \sin A = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ 13 分

16. 解: (1) 证明: 如图, 连接 A_1B , 交 AB_1 于点 E , 连接 OE, C_1E , 1 分
由题知四边形 AA_1B_1B 是菱形,

则 E 为 AB_1 的中点, $\because O$ 是 AB 的中点, D 为 CC_1 的中点,

$\therefore OE \parallel BB_1 \parallel DC_1, OE = \frac{1}{2}BB_1 = DC_1$, 3 分

$\therefore$ 四边形 OEC_1D 为平行四边形,

$\therefore OD \parallel C_1E$ 4 分

$\because OD \not\subset$ 平面 $AC_1B_1, C_1E \subset$ 平面

$AC_1B_1, \therefore OD \parallel$ 平面 AC_1B_1 5 分

(2) 如图, 连接 $OC, \because \angle BAA_1 = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BAA_1$ 为正三角形, $\therefore A_1O \perp AB$,

又 $A_1O \perp BC$, 且 $BC \cap AB = B$,

$\therefore A_1O \perp$ 平面 ABC ,

又 $CO \subset$ 平面 $ABC, \therefore A_1O \perp CO$.

$\because \triangle ABC$ 是正三角形, $\therefore CO \perp AB$.

以 O 为原点, OA, OA_1, OC 所在直线分别

为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角

坐标系. 7 分

设 $AB = 2$, 得 $A_1O = OC = \sqrt{3}$,

则 $A(1, 0, 0), A_1(0, \sqrt{3}, 0), C(0, 0, \sqrt{3})$,

$B_1(-2, \sqrt{3}, 0)$,

由 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, 可得 $C_1(-1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$,

$\therefore \overrightarrow{AC_1} = (-2, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \overrightarrow{AA_1} = (-1, \sqrt{3}, 0),$

$\overrightarrow{AB_1} = (-3, \sqrt{3}, 0)$ 9 分

设平面 A_1AC_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{AA_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \\ -x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, 1)$ 11 分

设平面 AC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b,$

$c)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{AC_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} -2a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}c = 0, \\ -3a + \sqrt{3}b = 0, \end{cases} \text{ 令 } a = \sqrt{3}, \text{ 得}$$

$\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 3, -1)$ 13 分

设平面 A_1AC_1 与平面 AC_1B_1 的夹角

为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} =$

$$\frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \frac{\sqrt{65}}{13}, \therefore \text{平面 } A_1AC_1 \text{ 与平}$$

面 AC_1B_1 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{65}}{13}$.

..... 15 分

17. 解: (1) 根据题意可知, X 的可能取值为

$0, 1, 2$, 1 分

$$P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, \text{ 2 分}$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ 3 分}$$

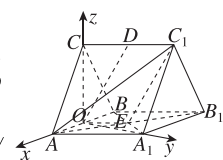
$$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}, \text{ 4 分}$$

可得 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times$

$$\frac{3}{10} = \frac{6}{5}. \text{ 6 分}$$



(2) 证明: 依题意, 棋子在第 1 格为必然事件, 所以 $P_1 = 1$, 棋子跳到第 2 格的概率为 $P_2 = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}$, 得 $P_2 - P_1 =$

$$-\frac{3}{5}. \text{ 7 分}$$

当 $3 \leq n \leq 24$ 时, 棋子跳到第 n 格有兩種情况: 第一种, 棋子从第 $n-2$ 格向前

跳 2 格; 第二种, 棋子从第 $n-1$ 格向前

跳 1 格. 因为棋子向前跳 2 格的概率为

$$\frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{2}{5}, \text{ 棋子向前跳 1 格的概率为}$$

$$\frac{C_3^1 + C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5}, \text{ 9 分}$$

所以 $P_n = \frac{3}{5}P_{n-2} + \frac{2}{5}P_{n-1} (3 \leq n \leq$

$24)$, 12 分

所以 $P_n - P_{n-1} = \frac{3}{5}P_{n-2} + \frac{2}{5}P_{n-1} -$

$P_{n-1} = -\frac{3}{5}(P_{n-1} - P_{n-2}) (3 \leq n \leq 24)$,

因此可得 $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-1} - P_{n-2}} = -\frac{3}{5} (3 \leq n \leq$

$24)$, 14 分

所以数列 $\{P_n - P_{n-1}\} (n = 2, 3, \dots, 24)$

是公比为 $-\frac{3}{5}$ 的等比数列. ... 15 分

解答 9 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 证明: 因为 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \times 2^n$, 所

$$\text{以 } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{2a_n + 3 \times 2^n}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2},$$

..... 2 分

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{2^1} = 1$ 为首项, $\frac{3}{2}$

为公差的等差数列. 4 分

(2) 由 (1) 知, $\frac{a_n}{2^n} = 1 + \frac{3}{2}(n-1) =$

$$\frac{3n-1}{2}, \text{ 6 分}$$

所以 $a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-1}$,

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-1}$ 7 分

(3) 因为 $a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-1}$, 所以 $S_n =$

$$2 \times 2^0 + 5 \times 2^1 + \dots + (3n-1) \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } 2S_n = 2 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \dots + (3n-1) \cdot 2^n,$$

$$\text{所以 } -S_n = 2 + 3 \times (2^1 + \dots + 2^{n-1}) -$$

$$(3n-1) \cdot 2^n = 2 + 3 \times \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} -$$

$$(3n-1) \cdot 2^n = (4-3n) \cdot 2^n - 4,$$

$$\text{所以 } S_n = (3n-4) \cdot 2^n + 4. \text{ 13 分}$$

16. 解: (1) 证明: 取 AF 的中点 M , 连接

DM, GM , 如图所示, 1 分

因为 G 为 BF 的中点, 所以 $GM \parallel AB$,

$$GM = \frac{1}{2}AB, \text{ 又 } AB \parallel DE, DE = \frac{1}{2}AB,$$

所以 $GM \parallel DE, GM = DE$,

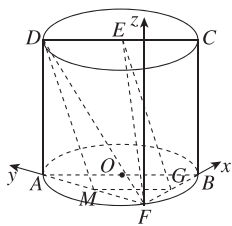
所以四边形 $DEGM$ 为平行四边形,

..... 3 分

所以 $DM \parallel EG$, 4 分

又 $DM \subset$ 平面 $DAF, EG \not\subset$ 平面 DAF ,

所以 $EG \parallel$ 平面 DAF 5 分



(2) 由 $OB=BF=1$, 易知 $\angle ABF=60^\circ$, 又 $\angle AFB=90^\circ$, 所以 $AF=\sqrt{3}$.

由 $DA \perp$ 平面 ABF , 知 $\angle AFD$ 为直线 DF 与圆柱底面所成的角, 即 $\angle AFD=45^\circ$, 所以 $AD=AF=\sqrt{3}$ 7 分

如图, 以 F 为原点, FB, FA 所在直线分别为 x, y 轴, 过 F 且垂直于平面 ABF 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $F(0, 0, 0), G(\frac{1}{2}, 0, 0), D(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}), E(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}), \overrightarrow{FD}=(0, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \overrightarrow{FE}=(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}), \overrightarrow{EG}=(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3})$ 10 分

设平面 DEF 的法向量为 $\mathbf{n}=(x, y, z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{FD} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0, \\ \overrightarrow{FE} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

令 $y=1$, 得 $\mathbf{n}=(\sqrt{3}, 1, -1)$ 13 分
设点 G 到平面 DEF 的距离为 d ,

$$d = \frac{|\overrightarrow{EG} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\frac{-\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17. 解: (1) 设 $P(x_0, y_0) (-2 < x_0 < 6)$, 则 $x_0^2=4y_0$ 1 分
因为点 P 是 AQ 的中点, 所以 Q 的坐标为 $(2x_0+2, 2y_0-1)$ 2 分
所以 $\overrightarrow{AP}=(x_0+2, y_0-1), \overrightarrow{BQ}=(2x_0-4, 2y_0-10)$ 3 分
因为 $AP \perp BQ$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}=0$, 4 分
所以 $(x_0+2) \cdot (2x_0-4) + (y_0-1) \cdot (2y_0-10)=0$, 即 $(x_0+2) \cdot (x_0-2) + (\frac{x_0^2}{4}-1) \cdot (\frac{x_0^2}{4}-5)=0$, 得 $x_0^2=4$, 6 分
所以 $x_0=2$ 或 $x_0=-2$ (舍去), 故点 P 的坐标为 $(2, 1)$ 7 分
(2) 证明: 方法一, 依题意, 易知直线 AP 的斜率存在, 当直线 AP 的斜率为 0 时, 直线 BQ 的斜率不存在, 此时点 P 的坐标为 $(2, 1)$, 点 Q 的坐标为 $(6, 1)$, 得 $|BQ|=8$ 8 分
当直线 AP 的斜率不为 0 时, 设直线 AP 的斜率为 $k (k \neq 0)$, 则直线 BQ 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 则直线 AP 的方程为 $y-1=k(x+2)$, 直线 BQ 的方程为 $y-9=-\frac{1}{k}(x-6)$, 9 分

$$\begin{cases} y-1=k(x+2), \\ y-9=-\frac{1}{k}(x-6), \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

即点 Q 的横坐标为 $\frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1}$, 所以

$$|BQ| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| \frac{-2k^2+8k+6}{k^2+1} - 6 \right| = \frac{8|k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = 8\sqrt{1-\frac{2k}{k^2+1}} = 8\sqrt{1-\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}, \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

因为 $k+\frac{1}{k} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$,

所以 $|BQ| \leq 8\sqrt{2}$, 当且仅当 $k+\frac{1}{k}=-2$, 即 $k=-1$ 时等号成立. 14 分

而当 $k=-1$ 时, 点 A 与点 P 重合, 与已知矛盾, 所以 $|BQ|$ 无最大值. 15 分

方法二, 由题意知恒有 $BQ \perp AQ$, 又点 P 位于点 A, B 之间的曲线段上, 所以点 Q 的轨迹是以 AB 为直径, 位于直线 AB 下方的半圆, 10 分
又点 P 不与点 A, B 重合,

$|AB| = \sqrt{(6+2)^2 + (9-1)^2} = 8\sqrt{2}$, 所以 $|BQ| < |AB| = 8\sqrt{2}$, 13 分
即 $|BQ|$ 无最大值. 15 分

解答 10 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 从左到右, 第一组的频率为 $0.0075 \times 20 = 0.15$, 第二组的频率为 $0.0125 \times 20 = 0.25$, 所以第三、四、五组的频率之和为 $1 - (0.15 + 0.25) = 0.6$, 可得第三组的频率为 $0.6 \times \frac{3}{3+2+1} = 0.3$, 则 $a = 0.3 \div 20 = 0.015$ 3 分
(2) 因为后三个小矩形的高度比为 $3:2:1$, 所以第四组、第五组的频率分别为 $0.2, 0.1$, 所以从左到右各组的频率分别为 $0.15, 0.25, 0.3, 0.2, 0.1$, 5 分
估计高一年级 1000 名学生假期日均阅读时间的平均数为 $30 \times 0.15 + 50 \times 0.25 + 70 \times 0.3 + 90 \times 0.2 + 110 \times 0.1 = 67$ (分钟). 7 分
(3) 由题意, 应从假期日均阅读时间在 $[60, 80), [80, 100), [100, 120]$ 内的学生中分别抽取 3 人, 2 人, 1 人, 则 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$, 8 分
可得 $P(X=0) = \frac{C_3^1 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$, 9 分
 $P(X=1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$, 10 分
 $P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$, 11 分
所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1.$$

..... 13 分

16. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x} (a \neq 0)$, 1 分

当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 2 分

当 $a > 0$ 时, 若 $0 < x < \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) > 0$, 若 $x > \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减. 4 分

综上, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 没有单调递减区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 6 分

- (2) 令 $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - ax - \frac{2}{ax} (x > 0)$, 要使 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 只需使 $h(x) \leq 0$ 恒成立, 即 $h(x)_{\max} \leq 0$ 8 分

$$h'(x) = \frac{1}{x} - a + \frac{2}{ax^2} = \frac{-(ax+1)(ax-2)}{ax^2}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 $a > 0, x > 0$, 所以 $ax+1 > 0$ 恒成立, 当 $0 < x < \frac{2}{a}$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x > \frac{2}{a}$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)_{\max} = h(\frac{2}{a}) = \ln \frac{2}{a} - 3 \leq 0$, 13 分

$$\text{解得 } a \geq \frac{2}{e^3}, \text{ 所以 } a \text{ 的最小值为 } \frac{2}{e^3}.$$

..... 15 分

17. 解: (1) 证明: 如图, 取 AC 的中点 O , 连接 ON, OB , 2 分

由题意知, 四边形 $ACFD$ 是等腰梯形, $\triangle ABC$ 是等边三角形,

所以 $ON \perp AC, OB \perp AC$,

因为 $ON \cap OB = O, ON, OB \subset$ 平面 OBN , 所以 $AC \perp$ 平面 OBN , 4 分
又 $BN \subset$ 平面 OBN , 所以 $AC \perp BN$ 5 分

(2) 由 (1) 知, $ON \perp AC, OB \perp AC$, 所以 $\angle BON$ 就是二面角 $D-AC-B$ 的平面角, 即 $\angle BON = \theta$ 6 分

因为 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即 $\angle BON = \frac{\pi}{2}$, 所以 $OB \perp ON$, 因为 $ON \perp AC, OB \cap AC = O, OB, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $ON \perp$ 平面 ABC , 即三棱台 $ABC-DEF$ 的高为 ON 8 分

因为 $AB=BC=AC=2, AD=DF=FC=$

1, 所以 $ON = \sqrt{AD^2 - (OA - DN)^2} = \sqrt{1^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$,
 10 分
 所以三棱台 $ABC-DEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3}}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{8}$ 11 分

(3) 以 O 为坐标原点, OA , OB 所在直线分别为 x 轴、 y 轴, 过点 O 且与平面 ABC 垂直的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,
 12 分

则 $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)$, 其中 $\theta \in (0, \pi)$, 所以 $\overrightarrow{CB} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{CF} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)$, $\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$.
 13 分

设平面 $BCFE$ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = x + \sqrt{3}y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}z \sin \theta = 0, \end{cases}$
 取 $y = -1$, 则 $x = \sqrt{3}$, $z = \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}$, 所以 $\mathbf{n} = \left(\sqrt{3}, -1, \frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}\right)$ 14 分

因为点 A 到平面 $BCFE$ 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $\frac{|\overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|2\sqrt{3}|}{\sqrt{3+1+\left(\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 整理得 $\left(\frac{\cos \theta - 1}{\sin \theta}\right)^2 = 4$,
 即 $\frac{(\cos \theta - 1)^2}{1 - \cos^2 \theta} = 4$, 可得 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$,
 即 $\cos \theta$ 的值为 $-\frac{3}{5}$ 15 分

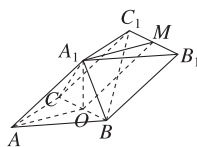
解答 11 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$ 1 分
 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1) = n$, 3 分
 当 $n=1$ 时, 也满足 $a_n = n$, 4 分
 $\therefore a_n = n, n \in \mathbf{N}^*$ 5 分
 (2) $b_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ 2^{a_n}, & n \text{ 为偶数} \end{cases} =$
 $\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), & n \text{ 为奇数}, \\ 2^n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 7 分
 则 $T_{2n} = (b_1 + b_3 + \cdots + b_{2n-1}) + (b_2 +$

$b_4 + \cdots + b_{2n})$ 8 分
 $= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right] + 2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2n}$ 10 分
 $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{4(1-4^n)}{1-4} = \frac{n}{2n+1} + \frac{4^{n+1}-4}{3}$, 12 分
 $\therefore \{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 $T_{2n} = \frac{n}{2n+1} + \frac{4^{n+1}-4}{3}$ 13 分

16. 解: (1) 由题知 $a=1$, 当直线 l 过点 $M(2, 0)$ 且与双曲线 C 有且仅有一个公共点时, l 与 C 的渐近线平行. 不妨设直线 $l: y = b(x-2)$, 即 $bx - y - 2b = 0$, 4 分
 则点 $B(1, 0)$ 到直线 l 的距离为 $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore b=1$, 5 分
 $\therefore$ 双曲线 C 的标准方程为 $x^2 - y^2 = 1$ 6 分
 (2) 由题可知, 直线 l 的斜率不为 0, 且 l 与 C 的渐近线不平行, 设直线 $l: x = my + 2 (m \neq \pm 1)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x = my + 2, \end{cases}$ 得 $(m^2 - 1)y^2 + 4my + 3 = 0$, 8 分
 $\therefore \Delta = 4m^2 + 12 > 0$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 - 1}$,
 $y_1 y_2 = \frac{3}{m^2 - 1}$, 10 分
 $\therefore m y_1 y_2 = -\frac{3}{4}(y_1 + y_2)$ 11 分
 假设存在实数 λ , 使得 $k_2 = \lambda k_1$ 成立,
 $\therefore k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 1}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 1}$,
 $\therefore \lambda = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{y_2}{x_2 - 1}}{\frac{y_1}{x_1 + 1}} = \frac{y_2(x_1 + 1)}{y_1(x_2 - 1)} =$
 $\frac{y_2(my_1 + 3)}{y_1(my_2 + 1)} = \frac{m y_1 y_2 + 3 y_2}{m y_1 y_2 + y_1}$ 13 分
 $= \frac{-\frac{3}{4}(y_1 + y_2) + 3 y_2}{-\frac{3}{4}(y_1 + y_2) + y_1} =$
 $-\frac{\frac{3}{4}y_1 + \frac{9}{4}y_2}{\frac{1}{4}y_1 - \frac{3}{4}y_2} = -3$, 故存在实数 $\lambda =$
 -3 , 使得 $k_2 = \lambda k_1$ 成立. 15 分

17. 解: (1) 证明: 方法一: 如图, 分别取 BC, B_1C_1 的中点 O, M , 连接 OM, AO, A_1O, A_1M , 1 分
 易知 $AA_1 \parallel OM, AA_1 = OM$, $\therefore$ 四边形 $AOMA_1$ 为平行四边形.



$\therefore$ 侧面 BB_1C_1C 为矩形, $\therefore BB_1 \perp BC$, 又 $OM \parallel BB_1$, $\therefore OM \perp BC$ 3 分
 $\therefore$ 底面 ABC 为等边三角形, $\therefore AO \perp BC$, 又 $AO \cap OM = O, AO, OM \subset$ 平面 $AOMA_1$, $\therefore BC \perp$ 平面 $AOMA_1$,
 4 分

又 $A_1O \subset$ 平面 $AOMA_1$, $\therefore BC \perp A_1O$, 5 分
 又 O 是 BC 的中点, $\therefore A_1B = A_1C$ 6 分

方法二: 如图,

取 BC 的中点 O , 连接 AO, A_1O 1 分
 $\therefore$ 侧面 BB_1C_1C 为矩形, $\therefore BB_1 \perp BC$, 又 $AA_1 \parallel BB_1$, $\therefore AA_1 \perp BC$ 3 分
 $\therefore$ 底面 ABC 为等边三角形, $\therefore AO \perp BC$, 4 分
 又 $AO \cap AA_1 = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 AA_1O , 又 $A_1O \subset$ 平面 AA_1O , $\therefore A_1O \perp BC$ 5 分
 $\therefore O$ 为 BC 的中点, $\therefore A_1B = A_1C$ 6 分

(2) (i) 证明: $\therefore AB = BC = AC = 2, O$ 是 BC 的中点, $\therefore AO = \sqrt{3}, CO = BO = 1$, 7 分
 又 $A_1B = A_1C$ 且 $A_1C \perp A_1B$, $\therefore A_1C = A_1B = \sqrt{2}, A_1O = 1$.
 $\therefore BC \perp A_1O, BC \perp AO, \therefore \angle A_1OA$ 为二面角 A_1-BC-A 的平面角, 8 分
 又 $A_1O^2 + AO^2 = A_1A^2, \therefore \angle A_1OA = \frac{\pi}{2}$, 故平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABC 9 分

(ii) $\therefore OA_1, OA, OB$ 两两垂直, $\therefore$ 以 O 为原点, OA, OB, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A_1(0, 0, 1), A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, -1, 0)$,
 $\therefore \overrightarrow{CA} = (\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{A_1B} = (0, 1, -1), \overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{CA} = (\sqrt{3}, 1, 0)$ 11 分
 设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \mathbf{m} = \sqrt{3}x + y = 0, \\ \overrightarrow{A_1B} \cdot \mathbf{m} = y - z = 0, \end{cases}$ 取 $x =$
 $\sqrt{3}$, 则 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, -3, -3)$, 13 分
 易知平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{OA_1} = (0, 0, 1)$, 14 分

$\therefore |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{OA_1} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{OA_1}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{OA_1}|} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,
 $\therefore$ 平面 ABC 与平面 A_1BC_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 15 分

解答 12 “15~17 题” 43 分练

15. 解: (1) 证明: 因为 $(a+c)(\sin A + \sin C) = b \sin B + 3c \sin A$, 所以由正弦定理得 $(a+c)^2 = b^2 + 3ac$, 整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$.

则 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$,
 2 分
 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 3 分
 因为 $\cos A = \frac{3}{5} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $A \in (0, \pi)$, 所以 $A \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, 又 $A + C = \frac{2\pi}{3}$,
 所以 $C \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right)$, 所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形. 5 分
 (2) 因为 $\cos A = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin A = \frac{4}{5}$,
 所以 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$ 8 分
 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 即 $\frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{c}{\frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}}$, 所以 $c = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{4}$ 10 分
 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4 + 3\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8}$.
 13 分

16. 解: (1) 如图, 过 F 作 $FM \parallel AB$, 交 PB 于 M , 连接 MC , $\because AB \parallel EC, \therefore FM \parallel EC$,
 $\therefore M, F, E, C$ 四点共面. 2 分
 $\because EF \parallel$ 平面 PBC , 平面 $EFMC \cap$ 平面 $PBC = MC, EF \subset$ 平面 $EFMC, \therefore EF \parallel MC$, 4 分
 $\therefore$ 四边形 $EFMC$ 为平行四边形,
 $\therefore EC = FM, \therefore \frac{MF}{AB} = \frac{EC}{AB} = \frac{1}{3}$.
 5 分
 由 $\triangle PFM \sim \triangle PAB$, 可得 $\frac{AF}{FP} = 2$.
 6 分
 (2) 如图, 取 AE 的中点 O , 连接 PO ,
 由题可得 $PA = PE, \therefore PO \perp AE$.
 $\therefore$ 平面 $APE \perp$ 平面 $ABCE$, 平面 $APE \cap$ 平面 $ABCE = AE, PO \subset$ 平面 APE ,
 $\therefore PO \perp$ 平面 $ABCE$ 8 分
 以 O 为坐标原点, OA, OP 所在直线分别为 x, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, 1), E(-1, 0, 0), C(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0), \therefore \vec{PE} = (-1, 0, -1), \vec{EC} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 10 分
 设平面 PEC 的法向量为 $m = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \vec{PE} = -a - c = 0, \\ m \cdot \vec{EC} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 0, \end{cases}$
 取 $a = 1$, 则 $b = 1, c = -1, \therefore m = (1, 1, -1)$ 13 分
 易知平面 $ABCE$ 的一个法向量为 $n = (0, 0, 1), \therefore |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \left| -\frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore$ 平面 PEC 与平面 $ABCE$ 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 15 分

17. 解: (1) 在排列 51243 中, 与 5 构成逆序的数码有 4 个, 与 1 构成逆序的数码有 0 个, 与 2 构成逆序的数码有 0 个, 与 4 构成逆序的数码有 1 个, 与 3 构成逆序的数码有 0 个, 2 分
 所以 $T(51243) = 4 + 0 + 0 + 1 + 0 = 5$.
 4 分
 (2) 由 (1) 中的方法, 同理可得 $T(3412) = 4$, 5 分
 又 $T(51243) = 5$, 所以 $a_{n+1} = 5a_n - 4$, 设 $a_{n+1} + \lambda = 5(a_n + \lambda)$,
 得 $a_{n+1} = 5a_n + 4\lambda$, 所以 $4\lambda = -4$, 解得 $\lambda = -1$,
 则 $a_{n+1} - 1 = 5(a_n - 1)$ 7 分
 因为 $a_1 - 1 = 1 \neq 0$, 所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 1, 公比为 5 的等比数列,
 8 分
 所以 $a_n - 1 = 5^{n-1}$, 则 $a_n = 5^{n-1} + 1$.
 9 分
 (3) 因为 $j_i = n + 1 - i (i = 1, 2, \dots, n)$, 所以 $b_n = T(j_1 j_2 \dots j_n) = n - 1 + n - 2 + \dots + 1 + 0 = \frac{(n-1)n}{2}$, 12 分
 所以 $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{(n+1)n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$,
 13 分
 所以 $S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$.
 15 分

解答 13 “18 题、19 题”34 分练

18. 解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -2xe^x$, 可得 $f'(x) = -2(x+1)e^x$, 1 分
 则 $f'(1) = -4e, f(1) = -2e$, 2 分
 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y + 2e = -4e(x - 1)$,
 即 $y = -4ex + 2e$ 4 分
 (2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2xe^x$,
 定义域为 $\mathbf{R}$, 可得 $f'(x) = e^{2x} - 2(x+1)e^x = e^x(e^x - 2x - 2)$, 5 分
 令 $F(x) = e^x - 2x - 2$, 则 $F'(x) = e^x - 2$, 当 $x \in (-\infty, \ln 2)$ 时, $F'(x) < 0$,
 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 7 分
 所以 $F(x)_{\min} = F(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 =$

$-2\ln 2 < 0$, 又 $F(-1) = \frac{1}{e} > 0, F(2) = e^2 - 6 > 0$, 8 分
 所以存在 $x_1 \in (-1, \ln 2)$, 使得 $F(x_1) = 0$, 存在 $x_2 \in (\ln 2, 2)$, 使得 $F(x_2) = 0$, 所以当 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $F(x) > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;
 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $F(x) < 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;
 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $F(x) > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.
 所以当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 存在一个极大值和一个极小值. 10 分
 (3) 由 $f(x) = ae^{2x} - 2xe^x$, 可得 $f'(x) = 2ae^{2x} - 2(x+1)e^x = 2e^x(ae^x - x - 1)$, 因为对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x) + \frac{1}{a} \leq 0$ 恒成立, 所以 $f(0) + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a} \leq 0$, 可得 $a < 0$ 11 分
 令 $g(x) = ae^x - x - 1$, 则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,
 当 $x < 0$ 时, $e^x \in (0, 1)$, 则 $ae^x \in (a, 0)$, 所以 $g(x) = ae^x - x - 1 > a - x - 1$,
 则 $g(a-1) > a - (a-1) - 1 = 0$,
 又因为 $g(-1) = ae^{-1} < 0$, 所以存在 $x_0 \in (a-1, -1)$, 使得 $g(x_0) = 0$,
 即 $g(x_0) = ae^{x_0} - x_0 - 1 = 0$, 且当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时, $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$,
 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,
 所以 $f(x)_{\max} = f(x_0) = ae^{x_0} - 2x_0e^{x_0}$.
 由 $g(x_0) = ae^{x_0} - x_0 - 1 = 0$, 可得 $a = \frac{x_0 + 1}{e^{x_0}}$ 14 分
 因为对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x) + \frac{1}{a} \leq 0$ 恒成立, 所以只需 $f(x)_{\max} + \frac{1}{a} \leq 0$, 可得
 $(x_0 + 1)e^{x_0} - 2x_0e^{x_0} + \frac{e^{x_0}}{x_0 + 1} \leq 0$, 即
 $\frac{(1-x_0)(1+x_0)+1}{x_0+1} \leq 0$, 又 $x_0 + 1 < 0$,
 所以 $(1-x_0)(1+x_0)+1 \geq 0$,
 即 $2-x_0^2 \geq 0$, 可得 $-\sqrt{2} \leq x_0 < -1$.
 因为 $a = \frac{x_0+1}{e^{x_0}} (-\sqrt{2} \leq x_0 < -1)$, 所以
 设 $h(x) = \frac{x+1}{e^x} (-\sqrt{2} \leq x < -1)$,
 则 $h'(x) = \frac{-x}{e^x} > 0$, 可知 $h(x)$ 在 $[-\sqrt{2}, -1)$ 上单调递增, 所以 $h(x) \geq h(-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{e^{-\sqrt{2}}} = (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ 且
 $h(x) < h(-1) = 0$, 16 分
 所以实数 a 的取值范围是 $[(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, 0)$ 17 分

19. 解:(1)由题意可知 X 的所有可能取值为 $-1, 0, 1, \dots$ 1 分
且 $P(X=-1)=(1-\alpha)\beta, P(X=0)=\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta), P(X=1)=\alpha(1-\beta), \dots$ 4 分
则 X 的分布列为

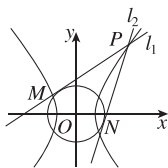
X	-1	0	1
P	$(1-\alpha)\beta$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

$\dots$ 5 分
(2) $\because a=0.5, \beta=0.8, \therefore a=0.5 \times 0.8=0.4, b=0.5 \times 0.8+0.5 \times 0.2=0.5, c=0.5 \times 0.2=0.1, \dots$ 8 分
(i) 证明: $\because p_i = ap_{i-1} + bp_i + cp_{i+1} (i=1, 2, \dots, 7), \therefore p_i = 0.4p_{i-1} + 0.5p_i + 0.1p_{i+1} (i=1, 2, \dots, 7)$, 整理可得 $5p_i = 4p_{i-1} + p_{i+1} (i=1, 2, \dots, 7), \therefore p_{i+1} - p_i = 4(p_i - p_{i-1}) (i=1, 2, \dots, 7)$, $\therefore p_1 - p_0 = p_1 \neq 0, \therefore \{p_{i+1} - p_i\} (i=0, 1, 2, \dots, 7)$ 是以 p_1 为首项, 以 4 为公比的等比数列. $\dots$ 10 分
(ii) 由 (i) 知 $p_{i+1} - p_i = p_1 \cdot 4^i$, $\therefore p_8 - p_7 = p_1 \cdot 4^7, p_7 - p_6 = p_1 \cdot 4^6, \dots, p_1 - p_0 = p_1 \cdot 4^0, \dots$ 12 分
以上各式累加可得 $p_8 - p_0 = p_1 \cdot (4^0 + 4^1 + \dots + 4^7) = \frac{1-4^8}{1-4} p_1 = \frac{4^8-1}{3} p_1$, 又 $p_0 = 0, p_8 = 1, \therefore p_1 = \frac{3}{4^8-1}, \dots$ 14 分
 $\therefore p_4 = p_4 - p_0 = (p_4 - p_3) + (p_3 - p_2) + (p_2 - p_1) + (p_1 - p_0) = p_1 \cdot (4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3) = \frac{1-4^4}{1-4} p_1 = \frac{4^4-1}{3} \times \frac{3}{4^8-1} = \frac{1}{4^4+1} = \frac{1}{257}, p_4$ 表示最终认为甲药更有效的概率.
由计算结果可以看出, 在甲药治愈率为 0.5, 乙药治愈率为 0.8 时, 认为甲药更有效的概率为 $p_4 = \frac{1}{257} \approx 0.0039$, 此时得出错误结论的概率非常小, 说明这种实验方案合理. $\dots$ 17 分

解答 14 “18 题、19 题”34 分练

18. 解:(1) 因为 C 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$, 所以 $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$,
则 $b^2 = 2a^2, \dots$ 1 分
所以 $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3}a, \dots$ 2 分
因为 $a^4 + b^4 + 4 = 4c^2$, 所以 $a^4 + 4a^4 + 4 = 12a^2$, 得 $(a^2 - 2)(5a^2 - 2) = 0$.
因为 $a > 1$, 所以 $a^2 > 1$, 则 $a^2 = 2$, 所以 $b^2 = 2a^2 = 4$, 故 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1. \dots$ 4 分
(2) 证明: (i) 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 如图所示,
设过点 P 的切线的斜率为 k , 则切线方

程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $kx - y + y_0 - kx_0 = 0$, 由圆心 $(0, 0)$ 到切线的距离等于半径, 得 $\frac{|y_0 - kx_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2,$



$\dots$ 7 分
即 $(4 - x_0^2)k^2 + 2kx_0y_0 + 4 - y_0^2 = 0$, 因此 l_1, l_2 的斜率 k_1, k_2 是以上方程的两个根, 则 $k_1k_2 = \frac{4 - y_0^2}{4 - x_0^2}, \dots$ 9 分
又因为 $\frac{x_0^2}{2} - \frac{y_0^2}{4} = 1$, 所以 $k_1k_2 = \frac{4 - y_0^2}{4 - x_0^2} = \frac{8 - 2x_0^2}{4 - x_0^2} = 2$, 所以 l_1, l_2 的斜率之积为定值, 且定值为 2. $\dots$ 10 分
(ii) 由 $\begin{cases} y - y_0 = k_1(x - x_0), \\ 2x^2 - y^2 = 4, \end{cases}$ 消去 y 得 $(2 - k_1^2)x^2 - 2k_1(y_0 - k_1x_0)x - k_1^2x_0^2 + 2k_1x_0y_0 - y_0^2 - 4 = 0, \dots$ 11 分
因为 $(4 - x_0^2)k_1^2 + 2k_1x_0y_0 + 4 - y_0^2 = 0$, 所以 $(2 - k_1^2)x^2 - 2k_1(y_0 - k_1x_0)x - 4(k_1^2 + 2) = 0$, 则 $x_1x_0 = \frac{-4(k_1^2 + 2)}{2 - k_1^2}, \dots$ 13 分
同理可得 $x_2x_0 = \frac{-4(k_2^2 + 2)}{2 - k_2^2}, \dots$ 14 分
所以 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{(k_1^2 + 2)(2 - k_2^2)}{(2 - k_1^2)(k_2^2 + 2)} = \frac{4 - k_1^2k_2^2 + 2(k_2^2 - k_1^2)}{4 - k_1^2k_2^2 + 2(k_2^2 - k_1^2)}.$
因为 $k_1k_2 = 2$, 所以 $4 - k_1^2k_2^2 = 0$, 所以 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2(k_1^2 - k_2^2)}{2(k_2^2 - k_1^2)} = -1$, 则 $x_1 + x_2 = 0.$
 $\dots$ 16 分
因为 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 都在 C 上, 所以 $y_1 + y_2 = 0$ 或 $y_1 = y_2$ (舍去), 所以存在定点 $A(0, 0)$, 使得 M, N 关于点 $A(0, 0)$ 对称. $\dots$ 17 分

19. 解:(1) 第 1 行最后两个数 $C_0^0 = C_1^1 = 1$, 第 2 行最后两个数 $C_2^2 = C_3^3 = C_3^0 = 2$.
 $\dots$ 1 分
第 $m(m \geq 3)$ 行的第 m 个数为 $C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3}$, 第 $m+1$ 个数为 $C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2}$,
猜测: $C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3} = C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2}.$
 $\dots$ 2 分
方法一: 要证 $C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3} = C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2}$, 即证 $C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2} = C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3}, \dots$ 3 分
即证 $C_{2m-2}^m + C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-1} = C_{2m-2}^{m-2} + C_{2m-2}^{m-3} - C_{2m-2}^{m-3}, \dots$ 5 分
即证 $C_{2m-2}^m = C_{2m-2}^{m-2}$, 该式显然成立,
所以 $C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2} = C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3}$, 所以每一行的最后两个数相等. $\dots$ 6 分
方法二: 因为 $C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2} = \frac{(2m-1)!}{m!(m-1)!} - \frac{(2m-1)!}{(m-2)!(m+1)!} = \frac{(2m-1)!}{m!(m+1)!} [m(m+1) - m(m-1)] =$

$\frac{2m(2m-1)!}{m!(m+1)!} = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}, \dots$ 4 分
 $C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3} = \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m-1)!} - \frac{(2m-2)!}{(m-3)!(m+1)!} = \frac{(2m-2)!}{(m-1)!(m+1)!} [(m+1)m - (m-1)(m-2)] = \frac{(4m-2)(2m-2)!}{(m-1)!(m+1)!} = \frac{2(2m-1)!}{(m-1)!(m+1)!} = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!},$
所以 $C_{2m-2}^{m-1} - C_{2m-2}^{m-3} = C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2}$, 所以每一行的最后两个数相等. $\dots$ 6 分
(2) 证明: 第 1 行的所有数之和为 $C_0^0 + C_1^1 = 2$, 第 2 行的最后一个数为 $C_3^3 - C_3^0 = 3 - 1 = 2$, 此时结论成立. $\dots$ 7 分
由组合数的性质知 $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$, 第 $m(m \geq 2)$ 行的 $m+1$ 个数之和为 $C_{m-1}^0 + C_m^1 + (C_{m+1}^2 - C_{m+1}^0) + (C_{m+2}^3 - C_{m+2}^1) + \dots + (C_{2m-1}^m - C_{2m-1}^{m-2}) = (C_{m-1}^0 + C_m^1 + C_{m+1}^2 + \dots + C_{2m-1}^m) - (C_{m+1}^0 + C_{m+2}^1 + \dots + C_{2m-1}^{m-2}) = (C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \dots + C_{2m-1}^m) - (C_{m+2}^0 + C_{m+3}^1 + \dots + C_{2m-1}^{m-2}) = (C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \dots + C_{2m-1}^m) - (C_{m+3}^2 + C_{m+4}^3 + \dots + C_{2m-1}^{m-1}) = \dots = C_{2m}^m - C_{2m}^{m-2}. \dots$ 10 分
而第 $m+1$ 行倒数第二个数为 $C_{2m}^m - C_{2m}^{m-2}$, 由 (1) 得每一行最后两个数相等, 所以结论得证. $\dots$ 11 分
(3) 当 $n=1, k=3$ 时, $S_1 = a_1 = C_1^1 = 1$, $3S_1 = 4^1 - 1$, 当 $k \geq 4$ 时, $kS_1 > 4^1 - 1$.
当 $n=2$ 时, $3S_2 < 4^2 - 1$.
猜测: 存在正整数 k , 使得对任意正整数 $n, kS_n \leq 4^n - 1$ 恒成立, k 的最大值为 3.
 $\dots$ 12 分
证明: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = C_{2n-1}^n - C_{2n-1}^{n-2} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, 则 $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!}$,
所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!} \times \frac{n!(n+1)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+2} = \frac{4(n+2)-6}{n+2} = 4 - \frac{6}{n+2} < 4.$
 $\dots$ 14 分
又 $a_n > 0$, 所以 $a_{n+1} < 4a_n (n \geq 2)$,
又 $a_2 = 2 < 4a_1$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n < 4a_{n-1} < 4^2a_{n-2} < \dots < 4^{n-1}a_1 = 4^{n-1}$,
所以当 $n \geq 2$ 时, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$, 所以 $3S_n < 4^n - 1$.
综上, 存在正整数 k , 使得对任意正整数 $n, kS_n \leq 4^n - 1$ 恒成立, k 的最大值为 3.
 $\dots$ 17 分

解答 15 “18 题、19 题”34 分练

18. 解:(1) 记事件 $A =$ “监测系统判定指定区域有珍稀动物活动”, 事件 $B =$ “指定区域实际上有珍稀动物活动”, $\dots$ 2 分
(i) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} =$

$$\frac{0.2 \times [1 - (1 - p_1)^2]}{0.2} = 0.96,$$

即在该区域有珍稀动物活动的条件下,该监测系统判定指定区域有珍稀动物活动的概率为 0.96. 4 分

$$\begin{aligned} (ii) P(A) &= P(AB \cup \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \\ &= 0.2[1 - (1 - p_1)^2] + 0.8[1 - (1 - p_2)^2] = 0.2 \times [1 - (1 - 0.8)^2] + 0.8 \times [1 - (1 - 0.02)^2] = 0.223\ 68, \dots\dots 6 \text{ 分} \\ \text{则 } P(\bar{B}|A) &= \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}{P(A)} \\ &= \frac{0.8 \times [1 - (1 - 0.02)^2]}{0.223\ 68} \approx 0.142, \end{aligned}$$

即在判定指定区域有珍稀动物活动的条件下,指定区域实际上没有珍稀动物活动的概率约为 0.142. 8 分

$$\begin{aligned} (2) P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} \\ &= \frac{0.2[1 - (1 - p_1)^2]}{0.2[1 - (1 - p_1)^2] + 0.8[1 - (1 - p_2)^2]}, \dots\dots 10 \text{ 分} \\ P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.8(1 - p_2)^2}{1 - \{0.8[1 - (1 - p_2)^2] + 0.2[1 - (1 - p_1)^2]\}}, \dots\dots 11 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由题意可得 } &\begin{cases} P(B|A) \geq 0.9, \\ P(\bar{B}|\bar{A}) \geq 0.9, \end{cases} \\ \text{即 } &\begin{cases} \frac{0.2[1 - (1 - p_1)^2]}{0.2[1 - (1 - p_1)^2] + 0.8[1 - (1 - p_2)^2]} \geq 0.9, \\ \frac{0.8(1 - p_2)^2}{1 - \{0.8[1 - (1 - p_2)^2] + 0.2[1 - (1 - p_1)^2]\}} \geq 0.9. \end{cases} \dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } 1 - p_1 &= x, 1 - p_2 = y, \\ \text{因为 } 0.8 &\leq p_1 \leq 0.9, 0 < p_2 < 1, \\ \text{所以 } 0.1 &\leq x \leq 0.2, 0 < y < 1, \end{aligned}$$

$$\text{可得 } \begin{cases} \frac{0.2(1 - x^2)}{0.2(1 - x^2) + 0.8(1 - y^2)} \geq 0.9, \\ \frac{0.8y^2}{1 - [0.8(1 - y^2) + 0.2(1 - x^2)]} \geq 0.9, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 36y^2 - x^2 \geq 35, \\ 4y^2 \geq 9x^2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y^2 \geq \frac{x^2 + 35}{36}, \\ y^2 \geq \frac{9x^2}{4}. \end{cases}$$

..... 15 分

$$\text{因为 } 0.1 \leq x \leq 0.2, \text{ 所以 } \frac{x^2 + 35}{36} \geq \frac{9x^2}{4},$$

$$\text{所以 } y^2 \geq \frac{x^2 + 35}{36}, \text{ 故 } \frac{\sqrt{35.04}}{6} \leq y < 1,$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{35.04}}{6} \leq 1 - p_2 < 1, \text{ 所以 } 0 < p_2 \leq$$

$$1 - \frac{\sqrt{35.04}}{6} \approx 0.013, \text{ 故 } p_2 \text{ 的取值范围}$$

为 $(0, 0.013]$ 17 分

19. 解: (1) 证明: 方法一, 由题意可得, $f'(x) = e^x - m$, 且 $x > 0, m \leq e$.

..... 1 分
若 $m \leq 1$, 则 $f'(x) = e^x - m > 1 - m \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x) > f(0) =$

$1 > 0$ 2 分
若 $1 < m \leq e$, 则令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln m$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \ln m$.
故 $f(x)$ 在 $(0, \ln m)$ 上单调递减, 在 $(\ln m, +\infty)$ 上单调递增, 3 分
可得 $f(x) \geq f(\ln m) = m(1 - \ln m)$, 因为 $1 < m \leq e$, 所以 $\ln m \leq 1$, 所以 $f(x) \geq m(1 - \ln m) \geq 0$ 4 分
综上所述, 当 $m \leq e$ 时, $f(x) \geq 0$.

..... 5 分
方法二, 因为 $m \leq e, x > 0$, 所以 $f(x) = e^x - mx \geq e^x - ex$, 2 分
设 $t(x) = e^x - ex$, 则 $t'(x) = e^x - e$,
..... 3 分
令 $t'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $t'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t'(x) > 0$,
所以 $t(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 4 分
所以 $t(x) \geq t(1) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$.
..... 5 分

方法三, $f(x) = e^x - mx = x \left(\frac{e^x}{x} - m \right)$,
 $x > 0$ 1 分

$$\text{设 } p(x) = \frac{e^x}{x} - m (x > 0), \text{ 则 } p'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}, \dots\dots 2 \text{ 分}$$

令 $p'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $p'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $p'(x) > 0$, 所以 $p(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 3 分
所以 $p(x) \geq p(1) = e - m$.

因为 $m \leq e$, 所以 $p(x) \geq 0$, 4 分
所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \cdot p(x) \geq 0$,
所以当 $m \leq e$ 时, $f(x) \geq 0$ 5 分

(2) ① 由题意可得 $g(x) = e^x - mx - x \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$, 令 $g(x) = 0$, 整理可得 $\frac{e^x}{x} - m - \ln x - \frac{1}{x} = 0$,

设 $h(x) = \frac{e^x}{x} - m - \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$, 则 $g(x)$ 有两个零点等价于 $h(x)$ 有两个零点. 6 分

$$h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(e^x - 1)}{x^2}, x > 0, \text{ 可知 } e^x - 1 > 0,$$

令 $h'(x) > 0$, 得 $x > 1$,

令 $h'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 则 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) \geq h(1) = e - m - 1$ 7 分

因为 $h(x)$ 有两个零点, 所以 $h(1) = e - m - 1 < 0$, 解得 $m > e - 1$.

当 $m > e - 1 > 0$ 时, 令 $a = e^{-m} \in (0, 1)$,

$$\text{则 } e^a - 1 > 0, \text{ 则 } h(a) = \frac{e^a - 1}{a} - \ln a -$$

$$m > -\ln a - m = -\ln e^{-m} - m = 0, \text{ 可知 } h(x) \text{ 在 } (a, 1) \text{ 上有且仅有一个零点};$$

..... 9 分
当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$, 可知 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上有且仅有一个零点.

故当 $m > e - 1$ 时, $h(x)$ 有两个零点, 即 $g(x)$ 有两个零点. 综上所述, m 的取值范围为 $(e - 1, +\infty)$ 11 分

② 证明: 方法一, 由 ① 可知 $h(x_1) = \frac{e^{x_1}}{x_1} - m - \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = 0$, 即 $m = \frac{e^{x_1}}{x_1} - \ln x_1 - \frac{1}{x_1}$, 要证 $x_1 + \ln x_2 < m - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 只

$$\text{需证 } x_1 + \ln x_2 < \frac{e^{x_1}}{x_1} - \ln x_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即证 } \ln(x_1 x_2) < \frac{e^{x_1}}{x_1} - x_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{令 } F(x) = \frac{e^x}{x} - x - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}, x > 0, \text{ 则}$$

$$F'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{x^2}.$$

令 $\varphi(x) = e^x - x - 1, x > 0$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $e^x - x - 1 > 0$.

令 $F'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $F'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 故 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $F(x) \geq$

$$F(1) = e - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0. \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{令 } G(x) = h(x) - h\left(\frac{1}{x}\right), x > 1, \text{ 则}$$

$$G'(x) = h'(x) + \frac{1}{x^2} h'\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{(x-1)(e^x - x e^{\frac{1}{x}} + x - 1)}{x^2}, \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{令 } n(x) = e^x - x e^{\frac{1}{x}} + x - 1, x > 1,$$

$$\text{则 } n'(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1,$$

因为 $x > 1$, 所以 $n'(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 > e - e + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 > 0$, 所以 $n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $n(x) > n(1) = 0$, 可得 $G'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $G(x) > G(1) = 0$,

$$\text{即 } h(x) > h\left(\frac{1}{x}\right), x > 1.$$

不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则 $h(x_1) = h(x_2) > h\left(\frac{1}{x_2}\right)$, 且 $0 < \frac{1}{x_2} < 1$, 又 $h(x)$

在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $x_1 < \frac{1}{x_2}$, 故

$0 < x_1 x_2 < 1$, 可得 $\ln(x_1 x_2) < 0$, 故

$$\ln(x_1 x_2) < 0 < \frac{e^{x_1}}{x_1} - x_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } x_1 + \ln x_2 < m - \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots 17 \text{ 分}$$

方法二, 由 ① 知 $h(x_1) = 0$, 即 $\frac{e^{x_1}}{x_1} -$

$$\ln x_1 - \frac{1}{x_1} - m = 0, \text{ 即 } m = \frac{e^{x_1}}{x_1} - \ln x_1 - \frac{1}{x_1},$$

要证 $x_1 + \ln x_2 < m - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 只需证

$$x_1 + \ln x_2 < \frac{e^{x_1}}{x_1} - \ln x_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{2}}{2},$$

即证 $\ln(x_1 x_2) < \frac{e^{x_1}}{x_1} - x_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 12 分
 设 $G(x) = \frac{e^x}{x} - x - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} (x > 0)$, 则
 $G'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x - 1)}{x^2}$.
 由 $e^x \geq ex$ 得 $e^{x-1} \geq x$, 所以 $e^x \geq x+1$
 (当且仅当 $x=0$ 时, 等号成立),
 所以当 $x > 0$ 时, $e^x - x - 1 > 0$.
 令 $G'(x) = 0$, 得 $x=1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时,
 $G'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$, 所以 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 所以 $G(x) \geq G(1) = e - 1 - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
 13 分
 要证 $\ln(x_1 x_2) < \frac{e^{x_1}}{x_1} - x_1 - \frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, 只需证 $\ln(x_1 x_2) < 0$, 即证 $x_1 x_2 < 1$.
 14 分
 令 $F(x) = h(x) - h\left(\frac{1}{x}\right) (x > 1)$,
 则 $F(x) = \frac{e^x}{x} - \ln x - \frac{1}{x} - m - \left(xe^{\frac{1}{x}} - \ln \frac{1}{x} - x - m\right) = e^{x-\ln x} - e^{\frac{1}{x}-\ln \frac{1}{x}} + (x - \ln x) - \left(\frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x}\right)$.
 15 分
 令 $H(x) = (x - \ln x) - \left(\frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x (x > 1)$, 则
 $H'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 > 0$,
 所以 $H(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 所以当 $x > 1$ 时, $H(x) > H(1) = 0$, 即
 $x - \ln x > \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x}$,
 所以 $e^{x-\ln x} > e^{\frac{1}{x}-\ln \frac{1}{x}}$, 所以当 $x > 1$ 时,
 $F(x) > 0$, 即 $h(x) > h\left(\frac{1}{x}\right)$.
 16 分
 若 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 则 $h(x_1) = h(x_2) > h\left(\frac{1}{x_2}\right)$, 即 $h(x_1) > h\left(\frac{1}{x_2}\right)$,
 又 $0 < \frac{1}{x_2} < 1$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $x_1 < \frac{1}{x_2}$, 即 $x_1 x_2 < 1$;
 若 $0 < x_2 < 1 < x_1$, 则 $h(x_1) = h(x_2) > h\left(\frac{1}{x_1}\right)$, 即 $h(x_2) > h\left(\frac{1}{x_1}\right)$,
 又 $0 < \frac{1}{x_1} < 1$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $x_2 < \frac{1}{x_1}$, 即 $x_1 x_2 < 1$.
 综上, $x_1 x_2 < 1$, 所以 $x_1 + \ln x_2 < m - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 17 分

解答 16 “18 题、19 题”34 分练

18. 解: (1) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 由题可知, 当 $k=0$ 时, 显然有 $k_{AM} + k_{BM} =$

0. 1 分
 当 $k \neq 0$ 时, 直线 OM 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x$, 点 $M(2k, -2)$.
 联立直线 AB 与抛物线 C 的方程得
 $x^2 - 2pkx - 4p = 0, \Delta = 4p^2 k^2 + 16p > 0$, 所以 $x_1 + x_2 = 2pk, x_1 x_2 = -4p$.
 3 分
 因为直线 AM, AB, BM 的斜率成等差数列, 所以 $\frac{y_1 + 2}{x_1 - 2k} + \frac{y_2 + 2}{x_2 - 2k} = 2k$, 即
 $\frac{kx_1 + 4}{x_1 - 2k} + \frac{kx_2 + 4}{x_2 - 2k} = 2k$,
 即 $\frac{(kx_1 + 4)(x_2 - 2k) + (kx_2 + 4)(x_1 - 2k)}{(x_1 - 2k)(x_2 - 2k)} = 2k$, 化简得 $2(k^2 + 2)(x_1 + x_2 - 4k) = 0$.
 5 分
 将 $x_1 + x_2 = 2pk$ 代入上式得 $2(k^2 + 2)(2pk - 4k) = 0$, 又 $k \neq 0$, 所以 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$.
 8 分
 (2) 证明: 设直线 $l': y = kx + n (n \neq 2)$, 联立直线 l' 与抛物线 C 的方程, 得
 $x^2 - 4kx - 4n = 0$.
 因为直线 l' 与抛物线 C 相切, 所以 $\Delta' = 16k^2 + 16n = 0$, 得 $n = -k^2$, 故点 $N(2k, k^2)$ 10 分
 设线段 AB 的中点为 E , 连接 ME , 因为
 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 2k, \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{k(x_1 + x_2) + 4}{2} = 2k^2 + 2$, 所以点 $E(2k, 2k^2 + 2)$.
 12 分
 因为 M, N, E 三点的横坐标均为 $2k$, 且
 $\frac{2k^2 + 2 - 2}{2} = k^2$, 所以 M, N, E 三点共线, 且点 N 为线段 ME 的中点, 所以
 $\triangle AMN$ 的面积为 $\triangle ABM$ 面积的 $\frac{1}{4}$.
 14 分
 记 $\triangle AMN$ 的面积为 S , 因为点 $M(2k, -2)$ 到直线 $AB: kx - y + 2 = 0$ 的距离
 $d = \frac{2k^2 + 4}{\sqrt{k^2 + 1}}$, 所以 $S = \frac{1}{8} |AB| \times d = \frac{1}{8} \sqrt{1 + k^2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \times \frac{2k^2 + 4}{\sqrt{k^2 + 1}} = (k^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当
 $k=0$ 时, 等号成立. 所以命题得证.
 17 分

19. 解: (1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .
 若 $q=1$, 则 $S_{10} = 10a_1 = 0$, 解得 $a_1 = 0$,
 则 $\sum_{i=1}^{10} |a_i| = 0$, 与题设矛盾, 舍去;
 1 分
 若 $q \neq 1$, 则 $S_{10} = \frac{a_1(1 - q^{10})}{1 - q} = 0$, 可得
 $q = -1$ 2 分
 则 $\sum_{i=1}^{10} |a_i| = 10 |a_1| = 1$, 解得 $a_1 = \frac{1}{10}$ 或 $a_1 = -\frac{1}{10}$ 3 分
 故 $a_n = \frac{1}{10} \cdot (-1)^{n-1} (1 \leq n \leq 10)$ 或
 $a_n = -\frac{1}{10} \cdot (-1)^{n-1} (1 \leq n \leq 10)$.

..... 5 分
 (2) 设等差数列 $\{a_n\} (1 \leq n \leq 2m, m \in \mathbf{N}^*)$ 的公差为 d , 因为 $S_{2m} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2m} = 0$, 所以 $\frac{2m(a_1 + a_{2m})}{2} = 0$, 则 $a_1 + a_{2m} = a_m + a_{m+1} = 0$,
 故 $a_m = -a_{m+1}$ 6 分
 由 $a_m > a_{m+1}$, 得 $d < 0, a_m > 0, a_{m+1} < 0$ 7 分
 又 $\sum_{i=1}^{2m} |a_i| = 1$, 所以 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m = \frac{1}{2}, a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots + a_{2m} = -\frac{1}{2}$, 两式相减得
 $m^2 \cdot d = -1$, 即 $d = -\frac{1}{m^2}$ 8 分
 又 $S_m = a_1 m + \frac{m(m-1)}{2} d = \frac{1}{2}$, 得
 $a_1 = \frac{2m-1}{2m^2}$ 9 分
 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{2m-1}{2m^2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{m^2}\right) = \frac{-2n+2m+1}{2m^2}$
 $(1 \leq n \leq 2m, m \in \mathbf{N}^*)$ 10 分
 (3) 记 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N$ 中所有非负项之和为 A , 所有负项之和为 B ,
 因为数列 $\{a_n\}$ 为“ N 阶可控摇摆数列”,
 所以 $\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} A = \frac{1}{2}, \\ B = -\frac{1}{2}, \end{cases}$
 故 $-\frac{1}{2} = B \leq S_n \leq A = \frac{1}{2} (n = 1, 2, 3, \cdots, N)$, 所以 $|S_n| \leq \frac{1}{2} (n = 1, 2, 3, \cdots, N)$ 12 分
 若存在 $1 < m < N$, 使得 $\sum_{i=1}^N |a_i| = 2S_m$, 即 $S_m = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \cdots, a_m \geq 0, a_{m+1} < 0, a_{m+2} < 0, \cdots, a_N < 0$,
 且 $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_N = -\frac{1}{2}$.
 13 分
 假设数列 $\{S_n\}$ 也为“ N 阶可控摇摆数列”, 记数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,
 则 $T_m = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m \leq \frac{1}{2}$,
 14 分
 因为 $S_m = \frac{1}{2}$, 所以 $S_1 = S_2 = S_3 = \cdots = S_{m-1} = 0$, 所以 $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{m-1} = 0, a_m = \frac{1}{2}$.
 15 分
 又 $a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_N = -\frac{1}{2}$, 所以
 $S_{m+1} \geq 0, S_{m+2} \geq 0, \cdots, S_N \geq 0$,
 所以 $|S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_N| = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_N$,
 故 $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_N = 0$ 与
 $|S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_N| = 1$ 不能同时成立, 故数列 $\{S_n\}$ 不能为“ N 阶可控摇摆数列”. 17 分